mathematica.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Παρασκευή 9 Ιουνίου 2017

Λύσεις των θεμάτων

Έκδοση 2η (10/06/2017, 16:30)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=58877

Συνεργάστηκαν οι:

Απόκης Γιώργος, Βαρβεράκης Ανδρέας, Βισβίκης Γιώργος,
Κακαβάς Βασίλης, Καλαθάκης Γιώργος, Καλδή Φωτεινή,
Καρδαμίτσης Σπύρος, Κατσίπης Νίκος, Κούτρας Στάθης,
Κωστάκος Γρηγόρης, Μαραγκουδάκης Παύλος, Μουρούκος Βαγγέλης,
Μπεληγιάννης Αθανάσιος, Παπαγρηγοράκης Μίλτος,
Πρωτοπαπάς Λευτέρης, Ρίζος Γιώργος, Στεργίου Μπάμπης,
Στόγιας Σωτήρης, Συγκελάκης Αλέξανδρος,
Συννεφακόπουλος Αχιλλέας, Τηλέγραφος Κώστας,
Τσιφάκης Χρήστος, Φραγκάκης Νίκος, Χασάπης Σωτήρης.

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

mathematica.gr

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_o, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

A4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0$.

β) Αν f,g είναι δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α,Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A1. Απόδειξη, σχολικό σελ 135.

A2. **α.** Λάθος

β. Με αντιπαράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x)=|x|=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ αφού

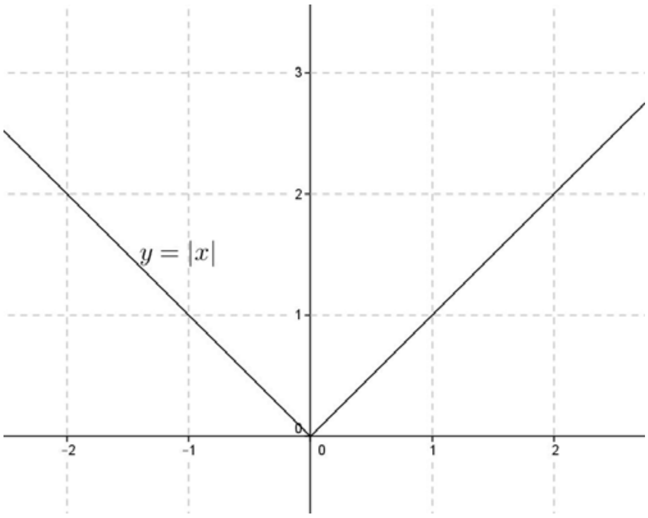
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0,$$

όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

και

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=-1.$$



A3. Ορισμός, σχολικό σελ. 25.

A4. **α)** Λάθος.

β) Σωστό, σχολικό σελ 25.

γ) Λάθος, σχολικό σελ 136.

δ) Σωστό, σχολικό σελ 67.

ε) Σωστό, σχολικό σελ 76.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=\frac{x}{1-x}, x\neq 1$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

B2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right), x\in(0,\ 1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

B3. Αν $\phi(x)=h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1}, x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση ϕ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ϕ και να τη σχεδιάσετε.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

B1. Είναι : $f(x)=\ln x$ με $A_f=(0,+\infty)$ και $g(x)=\frac{x}{1-x}$ με $A_g=\mathbb{R}-\{1\}$.

Η συνάρτηση $h=f\circ g$ ορίζεται αν και μόνο αν το σύνολο $A_h=\{x\in A_g \text{ και } g(x)\in A_f\}\neq\varnothing$.

Όμως $A_h=\left\{x\neq 1 \text{ και } \dfrac{x}{1-x}>0\right\}=\{x\neq 1 \text{ και } x(1-x)>0\}=\{x\neq 1 \text{ και } 0<x<1\}=(0,1)\neq\varnothing$,

αφού $x(1-x)>0\Leftrightarrow -x^2+x>0$, και επειδή το τριώνυμο έχει το $\alpha=-1<0$ και ρίζες $0,1$, θα είναι θετικό αν $0<x<1$. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x}{1-x}\right)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

B2. Έστω $x_1,x_2\in(0,1)$ με $h(x_1)=h(x_2)$ τότε έχουμε

$$h(x_1)=h(x_2)\ \Rightarrow\ \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)=\ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)\ \Rightarrow\ \frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2}{1-x_2}$$

$$\Rightarrow x_1(1-x_2)=x_2(1-x_1)\ \Rightarrow\ x_1-x_1x_2=x_2-x_1x_2\ \Rightarrow\ x_1=x_2.$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι 1 – 1, άρα αντιστρέφεται.

Είναι

$$h(x)=y\ \Leftrightarrow\ \ln\frac{x}{1-x}=y\ \Leftrightarrow\ e^y=\frac{x}{1-x}\ \Leftrightarrow\ e^y(1-x)=x$$

$$\Leftrightarrow\ e^y-xe^y=x\ \Leftrightarrow\ (1+e^y)x=e^y\ \Leftrightarrow\ x=\frac{e^y}{1+e^y}.$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι η

$$h^{-1}(x):\mathbb{R}\to(0,1),\text{με}\, h^{-1}(x)=\frac{e^x}{1+e^x}.$$

B3. Η συνάρτηση $\phi(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}, x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

με $\phi'(x)=\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)'=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Επίσης η συνάρτηση $\phi'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}, x\in\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη με

$$\phi''(x)=\left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\frac{e^x(e^x+1)^2-2e^x(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(e^x+1)-2e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

Επειδή το $\dfrac{e^x}{(e^x+1)^3}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πρόσημο της $\phi''(x)$ εξαρτάται από το $1-e^x$

Είναι:

$$1-e^x=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$$

$$1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow e^x<e^0\Leftrightarrow x<0$$

$$1-e^x<0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$$

Επομένως η ϕ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$ και αφού είναι παραγωγίσιμη στο 0 ορίζεται εφαπτομένη.

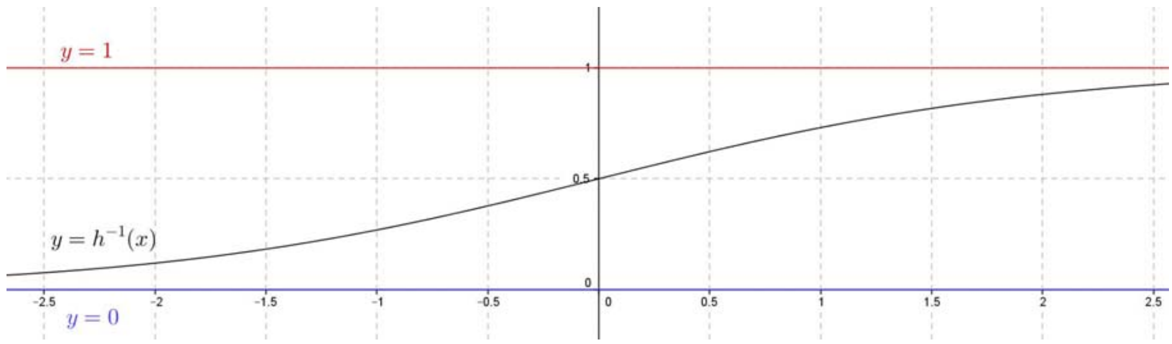
Συνεπώς έχουμε ότι το σημείο $A(0,\phi(0))$ δηλαδή το $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της ϕ.

B4. Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = 0$. Επομένως η ευθεία με εξίσωση $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της ϕ στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1) = +\infty$ και οι συναρτήσεις e^x, e^x+1 είναι παραγωγίσιμες, άρα από τους κανόνες De l' Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x+1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1.$$

Επομένως η ευθεία με εξίσωση $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της ϕ στο $+\infty$. Αξιοποιώντας και τα συμπεράσματα για τη μονοτονία και την κυρτότητα από το ερώτημα Β3, η γραφική παράσταση είναι η παρακάτω :



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $(\varepsilon_1): y=-x$ και $(\varepsilon_2): y = x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f και να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$ όπου:

- Ε1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2), και
- Ε2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη οπότε ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in [0,\pi]$, η οποία έχει εξίσωση:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

δηλαδή:

$$y+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0(x-x_0).$$

Η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$, άρα:

$$-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow 2\eta\mu x_0-2x_0\sigma\upsilon\nu x_0+\pi\sigma\upsilon\nu x_0-\pi=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x)=2\eta\mu x-2x\sigma\upsilon\nu x-\pi\sigma\upsilon\nu x-\pi$, με $x\in[0,\pi]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών, στο $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με:

$$g'(x)=\left(2\eta\mu x-2x\sigma\upsilon\nu x-\pi\sigma\upsilon\nu x-\pi\right)'=2\sigma\upsilon\nu x-2\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x-\pi\eta\mu x=2x\eta\mu x-\pi\eta\mu x=\eta\mu x\left(2x-\pi\right)$$

Είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$, αφού $\eta\mu x>0$, για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Επίσης, $g'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και

$g'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

x	0	$\pi/2$	π
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗

Οπότε, αφού g συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, τότε:

το σύνολο τιμών της στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι το $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[g\left(\frac{\pi}{2}\right),g(0)\right]=[2-\pi,0]$

και αφού g συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, τότε:

το σύνολο τιμών της στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ είναι το $g\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)=\left[g\left(\frac{\pi}{2}\right),g(\pi)\right]=[2-\pi,0]$.

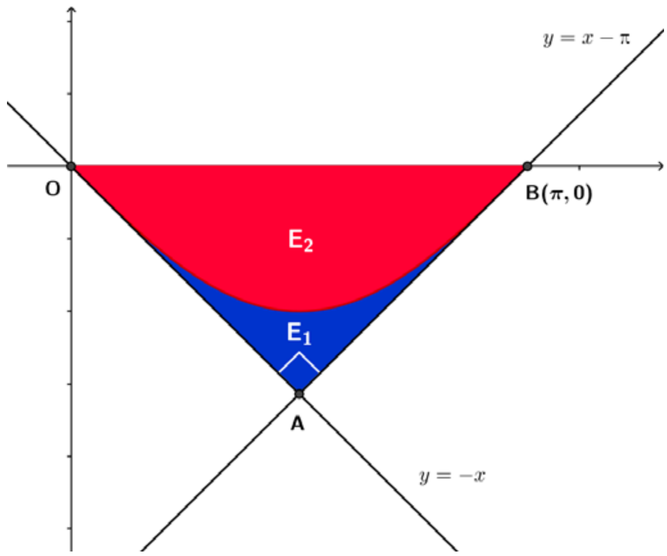
Άρα, οι μοναδικές ρίζες της g στο $[0,\pi]$ είναι: $x=0$ ή $x=\pi$.

Οπότε, αν $x_0=0$, τότε: $(\varepsilon_1): y=-x$ και αν $x_0=\pi$, τότε: $(\varepsilon_2): y=x-\pi$.

Γ2. Έχουμε ότι:

$(OA)=\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$,

$(AB)=\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)^2+\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$ και



οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες, άρα το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με εμβαδόν $(OAB)=\frac{(OA)\cdot(OB)}{2}=\frac{\pi^2}{4}$.

Εναλλακτικά το τρίγωνο OAB έχει βάση την OB=π και ύψος $\frac{\pi}{2}$, αφού το A έχει τεταγμένη $-\frac{\pi}{2}$. Τότε είναι $(OAB)=\frac{\pi\cdot\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi^2}{4}$.

Το E_1 προκύπτει αν από το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου OAB που είναι $(OAB)=\frac{\pi^2}{4}$ αφαιρέσουμε το E_2.

Επειδή $-\eta\mu x\le 0, x\in[0,\pi]$, θα είναι,

$$E_2=\int_0^\pi \eta\mu x\,dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi=-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0=2.$$

Άρα:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$$

Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{-\eta\mu x+x}{-\eta\mu x-x+\pi}$.

Για $x\to\pi$ ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται π και ο παρονομαστής μηδενίζεται.

Θα ελέγξουμε το πρόσημο του παρονομαστή καθώς το $x\to\pi$.

Έστω $\phi(x)=-\eta\mu x-x+\pi, x\in(0,\pi)$.

Είναι $\phi'(x)=-\sigma\upsilon\nu x-1<0, x\in(0,\pi)$ άρα η συνάρτηση ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\pi)$, οπότε θα έχει σύνολο τιμών το $\phi\big((0,\pi)\big)=\Big(\lim\limits_{x\to\pi^-}\phi(x), \lim\limits_{x\to 0^+}\phi(x)\Big)=\Big(\lim\limits_{x\to\pi^-}(-\eta\mu x-x+\pi), \lim\limits_{x\to 0^+}(-\eta\mu x-x+\pi)\Big)=(0,\pi)$, δηλαδή θα παίρνει θετικές τιμές.

Επομένως

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\pi\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}=+\infty$$

Γ4. Η συνάρτηση $\phi(x)=f(x)-x+\pi$ όπως αναφέρθηκε στο Γ3 είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,e]\subseteq[0,\pi]$ και αφού $\phi(e)=-\eta\mu e-1+\pi>0$ θα είναι $\phi(x)>0$ στο διάστημα $[1,e]$.

Δηλαδή $f(x)-x+\pi>0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{\pi}{x}>0$ και άρα,

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx-\int_1^e dx+\pi\int_1^e\frac{1}{x}dx>0.$$

Οπότε

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e dx-\pi\int_1^e\frac{1}{x}dx>0\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>(e-1)-\pi\big[\ln x\big]_1^e \qquad (1)$$

Αλλά $e-1-\pi[\ln x]_1^e=e-1-\pi(1-0)=e-1-\pi$. Οπότε η (1) δίδει $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4} & ,x\in[-1,0)\\ e^x\cdot\eta\mu x & ,x\in[0,\pi]\end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα y' y και την ευθεία $x=\pi$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot(4x-3\pi)^2=8\cdot\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

Δ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[-1,\pi]$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ και στο $(0,\pi]$ αφού προκύπτει από σύνθεση συνεχών και από γινόμενο συνεχών αντίστοιχα.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x ημx=e^0 ημ0=0$ και $f(0)=0$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ κι έτσι η f είναι συνεχής και στο 0. Άρα τελικά η f είναι συνεχής στο A.

Κρίσιμα σημεία της f (εσωτερικά σημεία του A που η f' δεν υπάρχει είτε μηδενίζεται).

Για $-1\le x<0$ είναι $f(x)=\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{(-x)^4}=(-x)^{4/3}$ και η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'=\left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)'\overset{x\in(-1,0)}{=}\left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}\cdot(-x)'=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}<0.$$

Για $0<x\le\pi$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(e^x ημx\right)'=e^x ημx+e^x συνx=e^x(ημx+συνx)$$

Επίσης

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\left(-(-x)^{1/3}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}e^x\frac{ημx}{x}=1\cdot 1=1$$

Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Άρα το 0 είναι κρίσιμο σημείο της f.

Θα βρούμε τα σημεία που η f' μηδενίζεται.

Αν $-1<x<0$ είναι $f'(x)<0$.

Για $0<x<\pi$ είναι

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x(ημx+συνx)=0\Leftrightarrow e^x=0 \text{ ή } ημx=-συνx\underset{συν\neq 0}{\Leftrightarrow}\frac{ημx}{συνx}=-1\Leftrightarrow εφx=-1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4},$$

αφού η συνάρτηση εφx είναι γνησίως αύξουσα και το $x=\frac{3\pi}{4}$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $εφx=-1$.

(Είναι συνx ≠ 0, αφού αλλιώς θα έπρεπε να είναι και ημx = –συνx = 0, γεγονός που αντιβαίνει στη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2x+συν^2x=1$).

Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι το 0 και το $\frac{3\pi}{4}$.

Δ2. Αν $-1\le x<0$ είναι $f'(x)<0$ και f συνεχής στο 0 άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$.

Για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ είναι

$$f'(x)=e^x(ημx+συνx)=\sqrt{2}e^x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}ημx+\frac{\sqrt{2}}{2}συνx\right)=$$

$$=\sqrt{2}e^x\left(ημx\cdot συν\frac{\pi}{4}+ημ\frac{\pi}{4}\cdot συνx\right)=\sqrt{2}e^x ημ\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Οπότε για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)\Rightarrow ημ\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0\overset{\sqrt{2}e^x>0}{\Rightarrow}f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$.

Ακόμα η f συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$,

ενώ για $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)\Rightarrow\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)\Rightarrow ημ\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0\overset{\frac{\sqrt{2}}{2}e^x>0}{\Rightarrow} f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

Ακόμα η f συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

Τελικά η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)=1$, τοπικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$, τοπικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{4}$ το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$ και τέλος τοπικό ελάχιστο στο π το $f(\pi)=0$.

Για το σύνολο τιμών:
Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_1=[-1,0]$ άρα $f(A_1)=[f(0),f(-1)]=[0,1]$
Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_2=\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ άρα $f(A_2)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}\right]$
Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_3=\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ άρα $f(A_3)=\left[f(\pi),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}\right]$

Τελικά, το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}\right]$,

αφού $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}>1\Leftrightarrow e^{3\pi/4}>\sqrt{2}\Leftrightarrow e^{3\pi}>\sqrt{2}^4\Leftrightarrow e^{3\pi}>4\Leftrightarrow 3\pi>\ln 4$, η οποία ισχύει, δεδομένου ότι $6<3\pi<9$ και $\ln e=1<\ln 4<\ln e^2=2$.

Δ3. Το ζητούμενο εμβαδό είναι το $E=\int_0^\pi |f(x)-g(x)|dx=\int_0^\pi e^x\,|ημx-e^{4x}|\,dx$.

Για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει $\begin{cases}ημx\le 1\\ e^{4x}\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ημx\le 1\\ -e^{4x}\le -1\end{cases}\Rightarrow ημx-e^{4x}\le 0$.

Άρα τελικά

$$E=\int_0^\pi e^x(e^{4x}-ημx)dx=\int_0^\pi e^{5x}dx-\int_0^\pi e^xημx dx=I_1-I_2,$$

όπου

$$I_1=\int_0^\pi e^{5x}dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi=\frac{e^{5\pi}-1}{5}.$$

$$I_2=\int_0^\pi e^xημx dx=\left[e^x\,ημx\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\,συνx dx=0-\left[e^x\,συνx\right]_0^\pi-I_2,\ \text{άρα}\ I_2=\frac{e^\pi+1}{2}.$$

Άρα τελικά $E=\frac{1}{10}(2e^{5\pi}-5e^{\pi}-7)$τ.μ. .

Δ4. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$16f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}e^{3\pi/4}\Leftrightarrow f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \quad (1)$$

Αν ισχύει η (1), τότε $0\le\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=f(x)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\le 0$, αφού $f(x)\le f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ για κάθε $x\in[-1,\pi]$.

Συνεπώς, $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0$, οπότε $x=\frac{3\pi}{4}$.

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

Β2. Εναλλακτική απόδειξη για την αντιστρεψιμότητα.

Η h είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=\left(\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)'=\frac{1-x}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}>0,\text{ για κάθε } x\in(0,1)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

Τότε αφού η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$, έχουμε ότι:

$h(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}h(x),\lim\limits_{x\to1^-}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

<u>**Σχόλιο:**</u> Για την εύρεση της παραγώγου θα μπορούσαμε να γράψουμε $h(x)=\ln x-\ln(1-x)$

που διευκολύνει την εύρεση της παραγώγου $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x(1-x)}>0$

Γ1. Στο σημείο $K(0,f(0))$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=-x$.

Στο σημείο $\Lambda(\pi,f(\pi))$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)\Leftrightarrow y=x-\pi$.

Η κλίση των υπόλοιπων ευθειών που διέρχονται από το σημείο A και τέμνουν το γράφημα της συνάρτησης f, είτε δεν ορίζεται (αν η ευθεία είναι κατακόρυφη), είτε είναι μικρότερη του -1 είτε μεγαλύτερη του 1, καθώς θα τέμνουν τον οριζόντιο άξονα σε εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[0,\pi]$.

Πράγματι, αν τον τέμνουν στο σημείο $B(x_0,0),\ x_0\in(0,\pi)$ τότε $\lambda_{AB}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{x_0-\frac{\pi}{2}}$ και είναι εύκολο να δούμε

ότι όταν $\frac{\pi}{2}<x_0<\pi$ τότε $\lambda_{AB}>1$ ενώ όταν $0<x_0<\frac{\pi}{2}$ τότε $\lambda_{AB}<-1$.

Όμως η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=-\eta\mu x, x\in[0,\pi]$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[-1,1]$. Επομένως δεν υπάρχει άλλη εφαπτομένη που να διέρχεται από το σημείο A.

Γ1. Μια άλλη ιδέα για το ότι δεν υπάρχουν άλλες εφαπτόμενες της $y=f(x)$ που να διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$.

Έστω η εφαπτομένη $y+\eta\mu\alpha=-\sigma\upsilon\nu\alpha(x-\alpha)$ της $y=f(x)$ στο $(\alpha,f(\alpha))$ για $0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$.

Το σημείο τομής αυτής με την ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ έχει τεταγμένη:

$$y=-\eta\mu\alpha+\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\alpha>-\alpha+\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2},$$

αφού $ημα < α$, και πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $συνα < 1$ με $α - \frac{π}{2} \le 0$ παίρνουμε

$$\left(α - \frac{π}{2}\right)συνα \ge \left(α - \frac{π}{2}\right).$$

Άρα δεν διέρχεται από το σημείο $Α\left(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2}\right)$.

Ομοίως, έστω η εφαπτομένη $y + ημα = -συνα(x - α)$ της $y = f(x)$ στο $(α, f(α))$ για $\frac{π}{2} < α < π$

Το σημείο τομής αυτής με την ευθεία $x = \frac{π}{2}$ έχει τεταγμένη:

$$y = -ημα + \left(α - \frac{π}{2}\right)συνα > (α - π) - \left(α - \frac{π}{2}\right) = -\frac{π}{2},$$

αφού $ημα = ημ(π - α) < π - α$, και πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $-1 < συνα$ με $α - \frac{π}{2} > 0$ παίρνουμε

$$\left(α - \frac{π}{2}\right)συνα > -\left(α - \frac{π}{2}\right).$$

Άρα ούτε αυτή διέρχεται από το $Α\left(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2}\right)$.

Γ1. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει προφανείς ρίζες τις $x = 0$, $x = π$ και από τη μονοτονία αυτές είναι όλες οι λύσεις.

Γ3. Με αλλαγή μεταβλητής $y = π - x > 0$, κι αφού $f(x) = f(y)$, παίρνουμε

$$\lim_{x \to π} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + π} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f(y) + π - y}{f(y) + y}.$$

Για $0 < y < \frac{π}{2}$, είναι $-y < f(y) < y$, οπότε

$$f(y) + π - y > π - 2y > 0 \quad (1)$$

και

$$0 < f(y) + y < 2y, \text{ που δίνει } \frac{1}{f(y) + y} > \frac{1}{2y} \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) παίρνουμε

$$\frac{f(y) + π - y}{f(y) + y} > \frac{π - 2y}{2y} = \frac{π}{2y} - 1 \to +\infty, \text{ καθώς } y \to 0^+.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x \to π} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + π} = +\infty.$$

Γ3. Αφού η f είναι κυρτή η γραφική παράσταση της είναι πάνω από τη εφαπτομένη $(ε): y = x - π$ με εξαίρεση το σημείο επαφής $x = π$ οπότε $f(x) \ge x - π$ για κάθε $x \in [0, π]$.

Άρα $f(x) - x + π \ge 0$ για κάθε $x \in [0, π]$.

Ακόμη

$$\lim_{x\to\pi}\left(f(x)-x+\pi\right)=0.$$

Οπότε

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}\overset{\left(\frac{\pi}{0^+}\right)}{=}+\infty.$$

Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to\pi}\left(-\eta\mu x+x\right)=\pi>0$ και $\lim\limits_{x\to\pi}\left(-\eta\mu x-x+\pi\right)=0$.

Για $0<x<\pi$ ισχύει :

$$\left|\eta\mu(\pi-x)\right|<(\pi-x)\Leftrightarrow-(\pi-x)<\eta\mu(\pi-x)<\pi-x,$$

άρα

$$\eta\mu x<\pi-x\Leftrightarrow\pi-x-\eta\mu x>0\text{ , οπότε }\lim_{x\to\pi}\frac{-\eta\mu x+x}{-\eta\mu x-x+\pi}=+\infty.$$

Γ4. Προφανώς είναι $f(x)\ge-1$, για κάθε $x\in[0,\pi]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $\frac{\pi}{2}$, άρα $f(x)\ge-1$, για κάθε $x\in[1,e]$ συνεπώς $\frac{f(x)}{x}\ge-\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in[1,e]$.

Ολοκληρώνοντας την τελευταία παίρνουμε:

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>-\int_1^e\frac{1}{x}dx=-\left[\ln x\right]_1^e=-1.$$

Αρκεί προφανώς να αποδείξουμε $-1>e-1-\pi\Leftrightarrow\pi>e$ που προφανώς ισχύει.

<u>Σχόλιο:</u> Η παραπάνω τεχνική δίνει καλύτερο φράγμα (το -1) από το ζητούμενο.

Γ4. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,\pi]$ άρα θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο $(\pi,0)$ άρα $f(x)\ge x-\pi$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=\pi$. Άρα στο $[1,e]$ είναι $f(x)>x-\pi\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}>1-\frac{\pi}{x}$ οπότε ολοκληρώνοντας την τελευταία παίρνουμε:

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi.$$

Γ4. Στο διάστημα $[1,e]$ η συνάρτηση $u(x)=f(x)-x+\pi$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $u'(x)=-\sigma\upsilon\nu x-1$.

Στο $(1,e)$, $u'(x)<0$ άρα η u είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,e]$ και αφού $u(e)=-\eta\mu e-1+\pi>0$ θα είναι $u(x)>0$ στο διάστημα $[1,e]$ (κ.ο.κ.)

Δ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[-1,\pi]$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ και στο $(0,\pi]$ αφού προκύπτει από σύνθεση συνεχών και από γινόμενο συνεχών αντίστοιχα.

Επίσης

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\sqrt[3]{x^4}\underset{\lim\limits_{x\to0^-}u=0^+}{\overset{u=x^4}{=}}\lim_{u\to0^+}\left(\sqrt[3]{u}\right)=0=e^0\cdot\eta\mu0=0=f(0)$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^x ημx = e^0 ημ0 = 1\cdot 0 = 0 = f(0)$$

Οπότε $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ κι έτσι η f είναι συνεχής και στο 0. Άρα τελικά η f είναι συνεχής στο A. (...)

Δ1. (...) Θα βρούμε τα σημεία που η f' μηδενίζεται.

Αν $-1<x<0$ είναι $f'(x)<0$.

Για $0<x<π$ είναι

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(ημx+συνx)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}e^x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}ημx+\frac{\sqrt{2}}{2}συνx\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}e^x\left(ημx\cdot συν\frac{π}{4}+ημ\frac{π}{4}\cdot συνx\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}e^x ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)=0.$$

Λύνουμε την εξίσωση $\sqrt{2}e^x ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)=0$ με $x\in(0,π)$.

Είναι

$$\sqrt{2}e^x ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)=0 \overset{\sqrt{2}e^x>0}{\Leftrightarrow} ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)=0$$

Τότε είναι $x+\frac{π}{4}=kπ \Leftrightarrow x=kπ-\frac{π}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$ με $x\in(0,π)$.

Οπότε έχουμε

$$0<x<π \Leftrightarrow 0<kπ-\frac{π}{4}<π \Leftrightarrow \frac{π}{4}<kπ<\frac{5π}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}<k<\frac{5}{4}$$

Αφού $k\in\mathbb{Z}$ είναι $k=1$ και $x=π-\frac{π}{4}=\frac{3π}{4}$.

Συνεπώς τα κρίσιμα σημεία της f είναι το 0 και το $\frac{3π}{4}$.

Δ2. **Παρατήρηση:** Το $f\left(\frac{3π}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3π}{4}}>1$ είναι το ολικό μέγιστο (το μέγιστο των τοπικών μεγίστων, αφού $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3π}{4}}>1$ (διότι $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3π}{4}}>1 \Leftrightarrow e^{\frac{3π}{4}}>2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{3π}{4}>\frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \ln 2<\frac{3π}{2}$, η οποία ισχύει αφού $\ln 2<1=\ln e<\frac{3π}{2}$) και η f παρουσιάζει ολικά ακρότατα ως συνεχής στο κλειστό διάστημα [–1, π])

και $f(0) = f(π) = 0$ το ολικό ελάχιστο (παρουσιάζεται σε δύο θέσεις).

Δ3. Το ζητούμενο εμβαδό είναι το

$$E=\int_0^π |f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^π e^x\,|ημx-e^{4x}|\,dx$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x)=ημx-e^{4x}, x\in[0,π]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x)=\sigma\upsilon\nu x-4e^{4x}<0$$

διότι για $x\geq 0$ έχουμε $4e^{4x}\geq 4$ και $\sigma\upsilon\nu x\leq 1$.

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα οπότε $h(x)\leq h(0)=-1<0$. (…)