

mathematica.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Παλαιό σύστημα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Τετάρτη 17 Ιουνίου 2020

Λύσεις
των
θεμάτων



Έκδοση 1^η (21/06/2020, 19:30)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
<https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=67348>

Συνεργάστηκαν οι:
Βαρβεράκης Ανδρέας, Βισβίκης Γιώργος,
Κατσίπης Νίκος, Μάγκος Θάνος,
Παπαρηγοράκης Μίλτος, Ρίζος Γιώργος,
Στεργίου Μπάμπης, Στόγιας Σωτήρης,
Συγκελάκης Αλέξανδρος, Τηλέγραφος Κώστας,
Χασάπης Σωτήρης Χριστοφίδης Δημήτρης

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από τον δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Παλαιό σύστημα

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 7

- A2.** Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f ;

Μονάδες 4

- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

- A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ ».

- α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

- β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

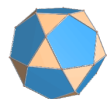
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 .

- β)** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

- γ)** Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\square$, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \square$.

Μονάδες 6



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A1. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 111.

A2. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 111.

A3. Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 74.

A4. α. Ψ.

β. Αντιπαράδειγμα. Έστω $f(x) = x$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και

• Αν $x > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

• Αν $x < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Άρα το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

A5. α. Σ β. Σ γ. Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

Μονάδες 5

B2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Μονάδες 8

B3. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{3x-1} \right)$.

Μονάδες 6

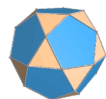
ΛΥΣΗ:

B1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$ για τα οποία είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3} = \frac{3x_2+1}{x_2-3} \Rightarrow (3x_1+1)(x_2-3) = (3x_2+1)(x_1-3) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Επομένως η συνάρτηση είναι '1-1', δηλαδή αντιστρέφεται.

B2. Για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ και $y \in f(D_f)$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x .



$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{x-3} \Leftrightarrow y(x-3) = 3x+1 \Leftrightarrow x(y-3) = 3y+1 \Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{y-3}, \quad y \neq 3.$$

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}, x \in \mathbb{R} - \{3\}.$

Είναι $D_f = D_{f^{-1}}$ και για κάθε $x \in D_f$ είναι $f(x) = f^{-1}(x)$, οπότε $f^{-1} = f$.

B3. Αφού $f^{-1}(x) = f(x)$ για κάθε $x \neq 3$, τότε για αυτά τα x έχουμε

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) \stackrel{f=f^{-1}}{=} f(f^{-1}(x)) = x.$$

B4. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ είναι

$$\left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq 1 \Rightarrow \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} f(x) \right| \leq |f(x)| \Rightarrow -|f(x)| \leq \eta\mu \frac{1}{3x+1} f(x) \leq |f(x)|$$

Επίσης, είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, το ζητούμενο όριο ισούται με μηδέν.

ΘΕΜΑ Γ

Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $\angle BOM = \theta$, τότε:

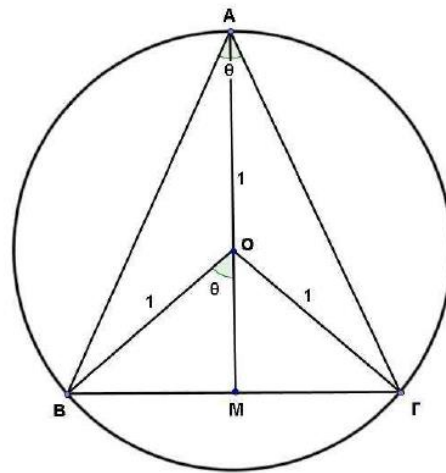
Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι :

$$E(\theta) = (1 + \sin\theta)\eta\mu\theta, \theta \in (0, \pi).$$

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Μονάδες 8



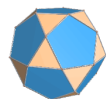
Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες θ_1, θ_2 , με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

Μονάδες 6

Γ4. Για τις γωνίες θ_1, θ_2 , του ερωτήματος **Γ3**, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2)$$

Μονάδες 6

**ΛΥΣΗ:**

Γ1. Όπως δίνεται η εκφώνηση, για το Μ δεν υπάρχει κάποιος ορισμός, εκτός του σχήματος, στο οποίο φαίνεται ότι είναι ένα σημείο της ΒΓ, ώστε $\angle BOM = \angle A = \theta$.

Για να έχει νόημα η συνθήκη $\angle BOM = \angle A = \theta$ πρέπει $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Αν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ χρειάζεται να αποδειχθεί το ότι είναι συνευθειακά τα Α, Ο, Μ και το ότι $AM \perp BG$.

Πράγματι, το Ο είναι περίκεντρο του ισοσκελούς ΑΒΓ, οπότε τα Α, Ο βρίσκονται στη μεσοκάθετή του.

Επίσης, $\angle BOG = 2\angle A = 2\theta$, άρα ΟΜ διχοτόμος της ΒΟΓ, οπότε και ύψος στη ΒΓ, άρα Α, Ο, Μ είναι συνευθειακά και $AM \perp BG$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΜ είναι

$$\eta\mu\theta = \frac{BM}{BO} = \frac{\frac{BG}{2}}{1} \Rightarrow BG = 2\eta\mu\theta \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OM}{BO} = \frac{OM}{1} \Rightarrow OM = \sigma\upsilon\nu\theta,$$

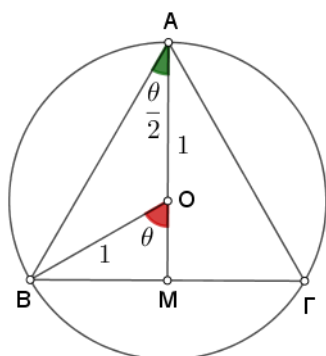
οπότε

$$AM = AO + OM = \sigma\upsilon\nu\theta + 1.$$

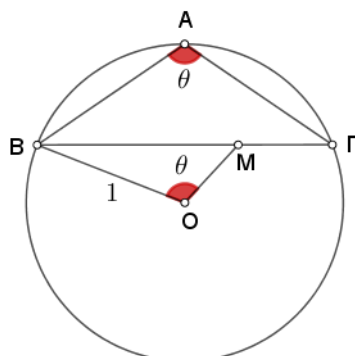
Άρα,

$$(\angle ABG) = 2(\angle AOB) + (\angle BOG) = 2 \cdot \frac{1}{2}\eta\mu\theta + \frac{1}{2}\eta\mu 2\theta \Leftrightarrow E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

- Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε το Μ ταυτίζεται με το Ο. Η περίπτωση είναι τετριμμένη. Ο τύπος προφανώς ισχύει.
- Αν $\theta > \frac{\pi}{2}$, τότε το σημείο Μ της ευθείας που ορίζουν τα Β, Γ για το οποίο είναι $\angle BOM = \angle A = \theta$ δεν είναι το μέσο της ΒΓ.



Σχήμα.1

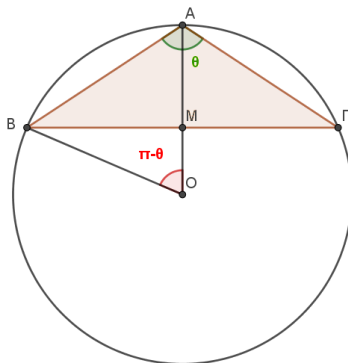


Σχήμα.2

Αποδεικνύεται ότι ο ίδιος τύπος του εμβαδού ισχύει για κάθε $\theta \in (0, \pi)$.

Παραβλέπουμε την αρχική συνθήκη της υπόθεσης $\angle BOM = A = \theta$ και εργαζόμαστε στο σχήμα 3.

Αν δεχτούμε ως M το σημείο τομής AO και BΓ, τότε $\angle BOM = \frac{\angle BO\Gamma}{2} = \frac{2\pi - 2\theta}{2} = \pi - \theta$.



Σχήμα 3

Οπότε:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΜ είναι

$$\eta\mu(\angle BOM) = \frac{BM}{BO} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{1} \Rightarrow B\Gamma = 2\eta\mu(\angle BOM) = \eta\mu(\pi - \theta) = \eta\mu\theta$$

και

$$\sigma\upsilon\nu(\angle BOM) = \frac{OM}{BO} = \frac{OM}{1} \Rightarrow OM = \sigma\upsilon\nu(\angle BOM) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta,$$

οπότε

$$AM = AO - OM = \sigma\upsilon\nu\theta + 1, \text{ κ.ο.κ.}$$

ΣΧΟΛΙΟ:

Η απόδειξη του τύπου μπορεί να γίνει δίχως το «βοηθητικό» σχήμα της εκφωνήσεως.

Πράγματι, έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) με $A = \theta$, $\theta \in (0, \pi)$,

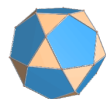
εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Τότε, από Ν. Ημιτόνων είναι

$$B\Gamma = 2R\eta\mu\theta, \quad AB = AG = 2R\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2R\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2},$$

οπότε (για $R = 1$), είναι

$$(\triangle AB\Gamma) = \frac{AB \cdot B\Gamma \cdot AG}{4R} = \frac{(2\eta\mu\theta \cdot R) \cdot \left(4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2} \cdot R^2\right)}{4R} = \eta\mu\theta \cdot \left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}\right) = \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$$

για $\theta \in (0, \pi)$.



Από εδώ και κάτω θεωρούμε ότι $\theta \in (0, \pi)$.

Γ2. $E'(\theta) = \sin\theta + \sin^2\theta - \eta\mu^2\theta = 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = (\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1)$

Είναι $E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$, αφού η εξίσωση $\sin\theta = -1$ δεν έχει λύσεις στο $(0, \pi)$.

Επίσης, είναι

$$E'(\theta) > 0 \Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \quad E'(\theta) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < \theta < \pi,$$

από όπου φαίνεται ότι το $E(\theta)$ μεγιστοποιείται όταν $\sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

Γ3. Η E είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} E(\theta) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} E(\theta) = 0, \quad E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

θα έχει σε καθένα από αυτά τα διαστήματα σύνολο τιμών $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$, που σημαίνει από το θεώρημα

των ενδιάμεσων τιμών ότι η συνάρτηση του εμβαδού παίρνει την τιμή $\frac{3}{4}$ ακριβώς δύο φορές για

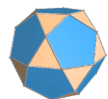
$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{3} < \theta_2 < \pi.$$

Γ4. Εφόσον η E είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$, ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε υπάρχουν τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ και

τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$, ώστε

$$E'(\xi_1) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} - 0}{\frac{\pi}{3} - \theta_1}, \quad E'(\xi_2) = \frac{0 - \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2)$$

ΣΧΟΛΙΟ: Στην εκφώνηση θα ήταν καλύτερο να προβλέπεται η συνθήκη $\xi_1 \neq \xi_2$, ειδικά, για $\xi_1 = \xi_2 = \frac{\pi}{3}$ επαληθεύεται προφανώς η ισότητα της εκφώνησης.

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x \ln x - \ln(\lambda x), \quad x \in (0, +\infty), \quad \lambda \in (0, +\infty) \quad \text{και}$$

$$g(x) = x^x, \quad x \in (0, +\infty)$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f , καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

- Δ2.** Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $x^x \geq \lambda x$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

Για τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 θεωρήστε ότι $\lambda = 1$.

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

- Δ4.** Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι η h είναι συνεχής

(μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση

$$x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

(μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ:

- Δ1.** Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 αν και μόνο αν

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq -\ln \lambda \Leftrightarrow (x-1) \ln x \geq 0,$$

η οποία είναι αληθής επειδή:

Αν $x=1$ ισχύει η ισότητα.

Αν $x > 1$ τότε $\ln x > \ln 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$, επομένως $(x-1) \ln x > 0$.

Αν $0 < x < 1$ τότε $\ln x < \ln 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$, επομένως $(x-1) \ln x > 0$

Επομένως η f στο 1 παρουσιάζει ελάχιστο το $f(1) = -\ln \lambda$.

Το σημείο $A(x, y)$ είναι σημείο που αντιστοιχεί στη θέση ακροτάτου αν και μόνο αν

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-\ln \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Άρα το σημείο ακροτάτου της f ανήκει στην ευθεία $x=1$.

Δ2. Για κάθε $x > 0$ και $\lambda > 0$ ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$$

Η τελευταία είναι αληθής για κάθε $x > 0$ αν και μόνο αν ισχύει ότι το ελάχιστο της f είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός, δηλαδή

$$-\ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq \ln 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1$$

Επομένως η μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ ώστε να ισχύει $x^x \geq \lambda x$ για κάθε $x > 0$ είναι η $\lambda = 1$.

Δ3. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = (x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο οποιοδήποτε σημείο της $A(\alpha, g(\alpha))$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι η

$$y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = xg'(\alpha) - \alpha g'(\alpha) + g(\alpha),$$

η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\begin{aligned} -\alpha g'(\alpha) + g(\alpha) &= 0 \Leftrightarrow -\alpha \alpha^\alpha (1 + \ln \alpha) + \alpha^\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^\alpha [-\alpha - \alpha \ln \alpha + 1] = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha + \alpha \ln \alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + \ln \alpha = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \ln \alpha - \frac{1}{\alpha} = -1. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(\alpha) = \ln \alpha - \frac{1}{\alpha}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1-1$, και η τελευταία γίνεται:

$$\ln \alpha - \frac{1}{\alpha} = -1 \Leftrightarrow H(\alpha) = H(1) \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Επομένως η μοναδική εφαπτομένη της C_g που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι αυτή που προκύπτει για $\alpha = 1$ δηλαδή η

$$y = xg'(1) - 1g(1) + g(1) \Leftrightarrow y = x.$$

Δ4i. Η h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών.

(Ισχύει $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ και είναι συνεχής ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών).

Επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = 1$$

επειδή αν θέσουμε $u = x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{(DLH)}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$,

συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1$.

Άρα η h είναι συνεχής στο 0 αφού ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = 1$.

Επομένως η h είναι συνεχής συνάρτηση, αφού είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Δ4ii. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$G(x) = x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt$$

η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολωνυμική και ισχύει ότι

$$G(0) = \int_0^1 h(1-t) dt \text{ και } G(1) = 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt.$$

Επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $x^x > 0$ και $h(0) = 1$ θα είναι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$, επομένως και

$$h(1-t) > 0 \text{ άρα } G(0) = \int_0^1 h(1-t) dt > 0$$

Επίσης η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = g(x)(1 + \ln x),$$

$$g''(x) = g'(x)(1 + \ln x) + g(x) \frac{1}{x} = g(x)(1 + \ln x)^2 + g(x) \frac{1}{x} = g(x) \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0$$

Που σημαίνει ότι η g είναι κυρτή, συνεπώς η γραφική παράσταση της βρίσκεται «πάνω» από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής.

Άρα, (αφού g συνεχής και δεν ισχύει παντού το ίσον) θα είναι

$$g(x) \geq x \Rightarrow \int_1^2 g(t) dt > \int_1^2 t dt \Rightarrow \int_1^2 g(t) dt > \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \int_1^2 g(t) dt > 3 \Rightarrow 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt < 0 \Rightarrow G(1) < 0.$$

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θ. Bolzano συνεπώς η εξίσωση

$$G(x) = 0 \Leftrightarrow x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.