mathematica.gr

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

***Νέο σύστημα***

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

**Τετάρτη 17 Ιουνίου 2020**

**Λύσεις**

των

**θεμάτων**

**Έκδοση 1η (17/06/2020, 19:30)**

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=67348

**Συνεργάστηκαν οι:**

Βαρβεράκης Ανδρέας, Κακαβάς Βασίλης,
Καρδαμίτσης Σπύρος, Κατσίπης Νίκος, Μάγκος Θάνος,
Μπεληγιάννης Αθανάσιος, Παπαγρηγοράκης Μίλτος,
Πρωτοπαπάς Λευτέρης, Ρίζος Γιώργος, Στεργίου Μπάμπης,
Στόγιας Σωτήρης, Συγκελάκης Αλέξανδρος,
Τηλέγραφος Κώστας, Τσιφάκης Χρήστος, Χασάπης Σωτήρης

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**
**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020**
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
***Νέο σύστημα***

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

- Η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- f(α)≠ f(β)

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$. **Μονάδες 7**

**Α2.** Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

**Α3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)>0$ ».

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}\right)=+\infty$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

**β)** Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β, αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται, αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

**γ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον y′y.

**δ)** Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

**ε)** Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της $C_f$, του οποίου η απόσταση από τον άξονα x′x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της $C_f$ είναι οριζόντια.

**Μονάδες 10**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**Α1.** Θεωρία. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 76.

**Α2.** Θεωρία. Στο σχολικό βιβλίο, σελ. 104.

**Α3.** **α.** Ψ.

**β.** Π.χ. το σχόλιο στο σχολικό βιβλίο, σελ. 136.

**Α4.** **α. Λ** **β. Σ** **γ. Σ** **δ. Σ** **ε. Σ**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $g(x)=e^x$.

**Β1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

**Μονάδες 5**

**Β2.** Αν $(f\circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ g$ είναι ‘1-1’ και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 8**

**Β3.** Αν $\phi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ell n\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x>1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση $\phi$ ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 6**

**Β4.** Αν $\phi$ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to 1^+}\phi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\phi(x).$$

**Μονάδες 6**

## ΛΥΣΗ:

**Β1.** Για το πεδίο ορισμού της σύνθεσης της g με την f έχουμε

$$A_{f\circ g}=\{x\in A_g \text{ και } g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ και } e^x>1\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ και } x>0\}=(0,+\infty)$$

και ο τύπος της είναι

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(e^x)=\frac{e^x+2}{e^x-1},\ x>0.$$

**Β2.** Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$$(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\Rightarrow \frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Rightarrow e^{x_1+x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1+x_2}-e^{x_2}+2e^{x_1}-2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3e^{x_2}=3e^{x_1}\Rightarrow e^{x_2}=e^{x_1}\Rightarrow x_1=x_2,$$

άρα η συνάρτηση $f\circ g$ είναι $1$-$1$ άρα αντιστρέφεται.

Είναι

$$y=\frac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2\Leftrightarrow ye^x-e^x=y+2\Leftrightarrow (y-1)e^x=y+2$$

- Για $y=1$ έχουμε $0=3$, αδύνατη.
- Για $y\neq 1$ έχουμε $e^x=\dfrac{y+2}{y-1}$ και επιπλέον $x>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow \dfrac{y+2}{y-1}>1\Leftrightarrow \dfrac{3}{y-1}>0\Leftrightarrow y>1$.

Άρα $e^x=\dfrac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)\Leftrightarrow (f\circ g)^{-1}(y)=\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$, $y>1$.

Άρα ο τύπος της αντίστροφης είναι $\phi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right), x>1$.

**B3.** Η συνάρτηση $\phi(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$\phi'(x)=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{(-3)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}<0,$$

άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

**B4.** Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to1^+}\phi(x)=\lim_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right).$$

Θέτουμε $u=\dfrac{x+2}{x-1}$, $\quad u_0=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}\cdot(x+2)\right)=+\infty$,

αφού είναι $\lim\limits_{x\to1^+}(x+2)=3>0$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=+\infty$.

Τότε είναι

$$\lim_{x\to 1^+}\phi(x)=\lim_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty.$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1.$$

Τότε είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=\lim_{u\to 1^+}\ln u=\ln 1=0.$$

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ell n\lambda, & x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases},\ \text{με } \lambda>0.$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(0, 1), η οποία σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f$.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha\le 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\frac{\alpha(t)}{3}$.
Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα x’x στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή $t_0$, κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη $-1$.

**Μονάδες 8**

**ΛΥΣΗ:**

**Γ1.** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Αφού η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο Α, τότε θα είναι συνεχής και στο $x=0$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\etaμx+\lambda\sigmaυνx\right)=f(0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1-\ln\lambda=\etaμ0+\lambda\sigmaυν0\Leftrightarrow 1-\ln\lambda=\lambda\Leftrightarrow \ln\lambda+\lambda-1=0.$$

Έστω

$$g(x)=\ln x+x-1,\quad x>0.$$

Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$$g'(x)=\frac{1}{x}+1>0,\ \text{για κάθε } x>0.$$

Άρα, η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επομένως, η συνάρτηση $g$ είναι $1-1$ στο $(0,+\infty)$.

Οπότε,

$$\ln\lambda+\lambda-1=0\Leftrightarrow g(\lambda)=0\Leftrightarrow g(\lambda)=g(1)\Leftrightarrow \lambda=1,$$

αφού η συνάρτηση $g$ είναι $1-1$.

**Γ2.** Για $\lambda=1$ είναι

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x\le 0\\ \etaμx+\sigmaυνx, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}.$$

Είναι $f(0)=1$.

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1-(1-x)}{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{x}{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-x}=1$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ημx+συνx-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{ημx}{x}+\dfrac{συνx-1}{x}\right)=1+0=1$.

Αφού είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$, τότε η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$, οπότε θα ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο σημείο της $A(0,1)$.

Τέλος, αφού είναι $f'(0)=1=εφ\dfrac{π}{4}$ ,αυτή θα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\dfrac{π}{4}$.

**Γ3.** Η συνάρτηση $f$ ορίζεται στο διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{3π}{2}\right)$.

Για $x<0$ η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη ως ρητή, με $f'(x)=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}>0.$

Στο διάστημα $\left(0,\dfrac{3π}{2}\right)$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $ημx$ και $συνx$, με $f'(x)=(ημx+συνx)'=συνx-ημx$.

Επιπλέον από το **Γ2** γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$.

Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f$ είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος $\left(-\infty,\dfrac{3π}{2}\right)$ στα οποία δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν.

Εφόσον είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος $\left(-\infty,\dfrac{3π}{2}\right)$, βρίσκουμε τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η $f'$.

Για $x\le 0$ η $f'$ είναι θετική, οπότε λύνουμε την $f'(x)=0$ για $x\in\left(0,\dfrac{3π}{2}\right)$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow συνx-ημx=0 \Leftrightarrow συνx=ημx.$$

Αν ήταν $συνx=0$ τότε από την $συνx=ημx$ θα ήταν και $ημx=0$, το οποίο είναι άτοπο , οπότε για $συνx\neq 0$ έχουμε

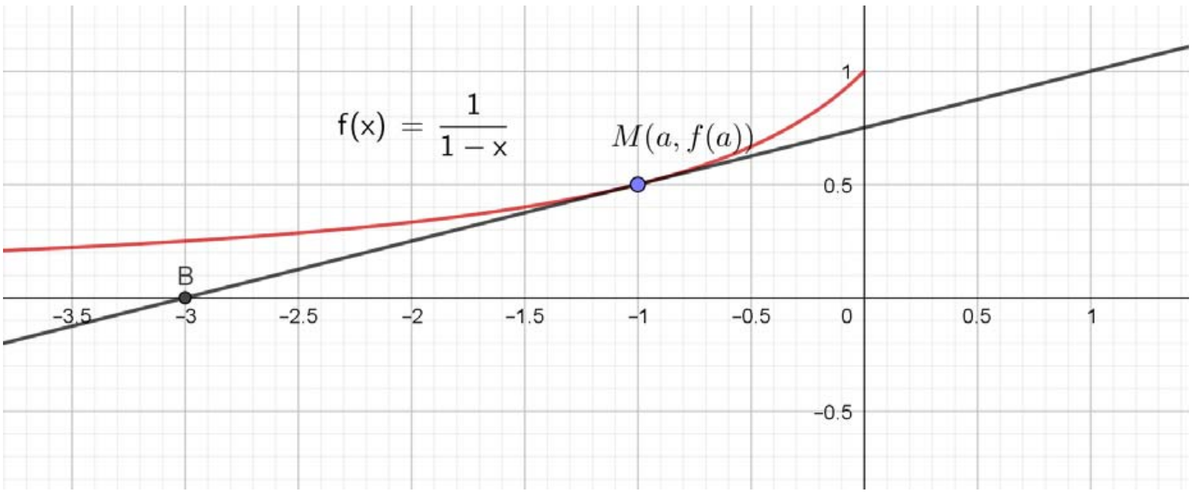
$$συνx=ημx \Leftrightarrow \frac{συνx}{συνx}=\frac{ημx}{συνx} \Leftrightarrow εφx=1 \Leftrightarrow εφx=εφ\frac{π}{4}.$$

Η τελευταία εξίσωση στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ έχει μοναδικές ρίζες τις $x_1=\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $x_2=\frac{5\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, αφού είναι προφανείς ρίζες της στα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ και γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από αυτά.

Έτσι, τα μόνα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f$ είναι τα $x_1=\frac{\pi}{4}$ και $x_2=\frac{5\pi}{4}$.

**Γ4.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$, είναι:

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha).$$




Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B$, του οποίου η τετμημένη προκύπτει για $y=0$. Οπότε:

$$\begin{aligned}-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) &\Leftrightarrow -\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)\\ &\Leftrightarrow -(1-\alpha)^2\frac{1}{1-\alpha}=(1-\alpha)^2\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)\\ &\Leftrightarrow -(1-\alpha)=x-\alpha\\ &\Leftrightarrow x=2\alpha-1.\end{aligned}$$

Άρα, η τετμημένη $x(t)$ του σημείου $B$ είναι

$$x(t)=2\alpha(t)-1,\quad t\ge 0.$$

Την χρονική στιγμή $t_0$ έχουμε ότι:

$$\alpha(t_0)=-1 \text{ και } \alpha'(t_0)=-\frac{\alpha(t_0)}{3}=\frac{1}{3}.$$

Τη χρονική στιγμή $t$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου $B$, είναι:

$$x'(t) = (2\alpha(t) - 1)' = 2\alpha'(t).$$

Οπότε, την χρονική στιγμή $t_0$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου $B$, είναι:

$$x'(t_0) = 2\alpha'(t_0) = \frac{2}{3}\ \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδες χρόνου}}.$$

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$, στο οποίο η $f$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$.

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]$$

όπου $x_0$ το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Αν $x_0$ είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Αν $x_0$ είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_0) > f(\rho)(f'(k)+1)$ για κάθε $k \in (\rho, 1)$.

**Μονάδες 7**

## ΛΥΣΗ:

**Δ1.** Η συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = e^x + 2x - e \text{ και } f''(x) = e^x + 2.$$

Ισχύει

$$f'(0) = 1 - e < 0 \text{ και } f'(1) = 2 > 0.$$

Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύει

$$f'(0)\cdot f'(1) < 0.$$

Επομένως, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ ώστε

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \ (1)$$

Μάλιστα, επειδή ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το $x_0$ του θεωρήματος Bolzano είναι μοναδικό.

Επίσης, από τη μονοτονία της $f'$ έχουμε:

- αν $x < x_0$ ισχύει $f'(x) < f'(x_0) = 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, x_0]$
- αν $x > x_0$ ισχύει $f'(x) > f'(x_0) = 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$

Άρα η f στο $x_0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1 \overset{(1)}{=} e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1 .$$

**Δ2.** Για x κοντά στο $x_0$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) = \frac{1+[f(x)-f(x_0)]\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)}{f(x)-f(x_0)}.$$

Ισχύουν ότι:

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = 0$, αφού η f είναι συνεχής στο $x_0$,
- $f(x)-f(x_0) > 0$ για κάθε $x \neq x_0$ , άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[1+[f(x)-f(x_0)]\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right] = 1 > 0$,

αφού

$$\left|[f(x)-f(x_0)]\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right| \le |f(x)-f(x_0)|,$$

οπότε

$$-|f(x)-f(x_0)| \le [f(x)-f(x_0)]\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \le |f(x)-f(x_0)|$$

και δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)| = 0,$$

από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x\to x_0}\left[[f(x)-f(x_0)]\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right] = 0.$$

Συνεπώς

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right] = +\infty.$$

**Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h$ με

$$h(x)=f(x)+x-x_0=e^x+x^2-ex-1+x-x_0\,,x\in\mathbb{R},x_0\in(0,1)\,.$$

Ισχύει ότι

$$h(1)=1-x_0>0 \text{ και } h(x_0)=f(x_0)<0,$$

αφού $0<x_0<1$ και η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_0)$ οπότε $f(0)>f(x_0)$ δηλαδή $f(x_0)<0$.

Η συνάρτηση $h$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $[x_0,1]$ και είναι $h(1)\cdot h(x_0)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $\rho\in(x_0,1)$ της

$$h(x)=0\Leftrightarrow f(x)+x=x_0.$$

Επιπλέον, ισχύει

$$h'(x)=f'(x)+1>0,\quad x>x_0,$$

οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$, άρα η ρίζα ρ είναι μοναδική αφού $\rho\in(x_0,1)\subseteq[x_0,+\infty)$.

**Δ4.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x-x_0$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[x_0,\rho]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x_0,\rho)$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi\in(x_0,\rho)$, ώστε να ισχύει

$$h'(\xi)=\frac{h(x_0)-h(\rho)}{x_0-\rho}=\frac{f(x_0)}{x_0-\rho}.$$

Επειδή ισχύει $h''(x)=f''(x)>0$ η $h'$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $k\in(\rho,1)$ ισχύει

$$h'(k)>h'(\rho)>h'(\xi)\text{, δηλαδή } f'(k)+1>\frac{f(x_0)}{x_0-\rho}$$

και επειδή είναι $f(\rho)=x_0-\rho<0$ προκύπτει η ζητούμενη.

**ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:**

**Β2.** Ισχύει

$$(f\circ g)(x)=\frac{e^x+2}{e^x-1}=1+\frac{3}{e^x-1},x>0 \quad\text{και}\quad \left((f\circ g)(x)\right)'=\frac{-3e^x}{(e^x-1)^2},x>0,$$

οπότε η $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε και 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Επίσης

$$\lim_{x\to0^+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{3}{e^x-1}\right)=+\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}1=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3}{e^x-1}=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{3}{u}=+\infty$, θέτοντας $u=e^x-1$.

Επιπλέον

$$\lim_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{e^x-1}\right)=1,$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x-1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{3}{u}=0$, θέτοντας $u=e^x-1$.

Συνεπώς αφού η $f\circ g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, έχουμε

$$(f\circ g)(A)=\left(\lim_{x\to+\infty}(f\circ g)(x),\lim_{x\to0^+}(f\circ g)(x)\right)=(1,+\infty).$$

Συνεπώς:

$$(f\circ g)^{-1}:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$$

και

$$y=f(x)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)\Leftrightarrow(f\circ g)^{-1}(y)=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right).$$

οπότε

$$(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\frac{x+2}{x-1},x>1.$$

**B3.** Είναι $\phi(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=\ln\left(\frac{x-1+3}{x-1}\right)=\ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right)$, $x>1$ κι έτσι έχουμε διαδοχικά

$$1<x_1<x_2\Rightarrow0<x_1-1<x_2-1\Rightarrow\frac{1}{x_1-1}>\frac{1}{x_2-1}>0\Rightarrow\frac{3}{x_1-1}>\frac{3}{x_2-1}$$

$$\Rightarrow1+\frac{3}{x_1-1}>1+\frac{3}{x_2-1}\Rightarrow\ln\left(1+\frac{3}{x_1-1}\right)>\ln\left(1+\frac{3}{x_2-1}\right)\Rightarrow\phi(x_1)>\phi(x_2)$$

Συνεπώς η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

**B3.** Έχουμε $\phi(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=\ln(x+2)-\ln(x-1)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}<0$ αφού για $x>1$ είναι

$$x+2>x-1\Rightarrow\frac{1}{x+2}<\frac{1}{x-1}.$$

**B4.** Από το **B3** έχουμε αποδείξει ότι η συνάρτηση $\phi$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ και από το **B2** έχουμε ότι το σύνολο τιμών της $\phi$ είναι το $\phi(A)=(0,+\infty)$.

Συνεπώς αφού η $\phi$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$, έχουμε ότι

$$\phi(A)=\left(\lim_{x\to+\infty}\phi(x),\lim_{x\to1^+}\phi(x)\right)$$

και αφού ισχύει $\phi(A)=(0,+\infty)$, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0\quad\text{και}\quad\lim_{x\to1^+}\phi(x)=+\infty.$$

**Γ1. (Για την τιμή του λ)**

Η εξίσωση είναι $\ln\lambda+\lambda-1=0$.
Το $\lambda=1$ είναι προφανής ρίζα.
Για $\lambda>1$ έχουμε $\ln\lambda+\lambda-1>0$ και για $0<\lambda<1$ έχουμε $\ln\lambda+\lambda-1<0$.
Άρα $\lambda=1$.

**Δ1.** Η συνάρτηση $f$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=e^x+2x-e \quad \text{και} \quad f''(x)=e^x+2>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Συνεπώς η συνάρτηση $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
Αφού η $f$ συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f(0)=f(1)=0$ από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0\Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$$

και επειδή η $f'$ γνησίως αύξουσα το $x_0$ είναι μοναδικό. Επίσης, από τη μονοτονία της $f'$ έχουμε:

- αν $x<x_0$ τότε $f'(x)<f'(x_0)=0$ οπότε η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,x_0]$
- αν $x>x_0$ τότε $f'(x)>f'(x_0)=0$ οπότε η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0,+\infty)$

  Άρα η $f$ στο $x_0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το

$$f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1 \Leftrightarrow f(x_0)=e-2x_0+x_0^2-ex_0-1$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)=x_0^2-(2+e)x_0+e-1$$

**Δ2.** Ας είναι

$$g(x)=\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right), x\neq x_0.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $g(x)\geq\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-1$ για κάθε $x\neq x_0$.

Επειδή η $f$ παρουσιάζει στο $x_0$ ολικό ελάχιστο και από την απόδειξη του Δ1 φαίνεται ότι το $x_0$ είναι η μοναδική θέση ελαχίστου, ισχύει $f(x)-f(x_0)>0$ για κάθε $x\neq x_0$,

Επομένως ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\right]=+\infty$$

Ως εκ τούτου είναι

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty.$$

**Δ2.** Για $x \neq x_0$ έχουμε ότι:

$$-1 \leq ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1 \leq \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \leq \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + 1$$

όπου

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + 1\right) = +\infty$$

οπότε από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right] = +\infty.$$

Χρησιμοποιήθηκε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)} = +\infty,$$

αφού

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = 0$, δεδομένου ότι η f είναι συνεχής στο $x_0$,
- $f(x) \geq f(x_0), x \in \mathbb{R}$.

**Δ2.** Αν ένας μαθητής έχει κάνει μελέτη της παραγώγου στο 1ο ερώτημα μπορεί να ωθηθεί στην παρακάτω λύση:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)\cdot\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + \frac{ημ\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)}{(x-x_0)\dfrac{1}{x-x_0}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{(x-x_0)}\cdot\left(\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + \frac{ημ\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)}{\dfrac{1}{x-x_0}}\right)\right]$$

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)}{\dfrac{1}{x-x_0}}\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[(x-x_0)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]=0$

Για $x<x_0 \Leftrightarrow x-x_0<0$ έχουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{x-x_0}=-\infty$ , $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=-\infty$ άρα

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+\frac{\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)}{\dfrac{1}{x-x_0}}\right)=-\infty$$

αφού είναι $f'(x)<0$ για $x<x_0$ , από τη μελέτη της μονοτονίας $f'(x)$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right)=+\infty$ .

Ομοίως και για $x>x_0$ προκύπτει $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{x-x_0}=+\infty$ , $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=+\infty$ ,

και τελικά $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right)=+\infty$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty.$

**Δ3.** Η $h$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x)=e^x+2x-e+1 \text{ και } h''(x)=e^x+2.$$

Τότε $h''(x)>0$, οπότε η $h'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης η συνάρτηση $h'$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών στο $[0,x_0]$ με

$$h'(0)=2-e<0, \quad h'(x_0)=1>0,$$

οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (0, x_0)$ έτσι ώστε $h'(\xi) = 0$.

Συνεπώς για $x > \xi$ έχουμε $h'(x) > h'(\xi) = 0$, οπότε η $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi, +\infty)$, οπότε η ρίζα $\rho$ της $f(x) + x = x_0$ είναι μοναδική, αφού $\rho \in (x_0, 1) \subset [\xi, +\infty)$.

**Δ3. (Εναλλακτικά για τη μοναδικότητα της ρίζας).**

Ισχύει $h'(x) = f'(x) + 1 > 0, x > x_0$,
οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[x_0, +\infty\right)$,
άρα η ρίζα ρ είναι μοναδική αφού $\rho \in (x_0, 1) \subset [x_0, +\infty)$.