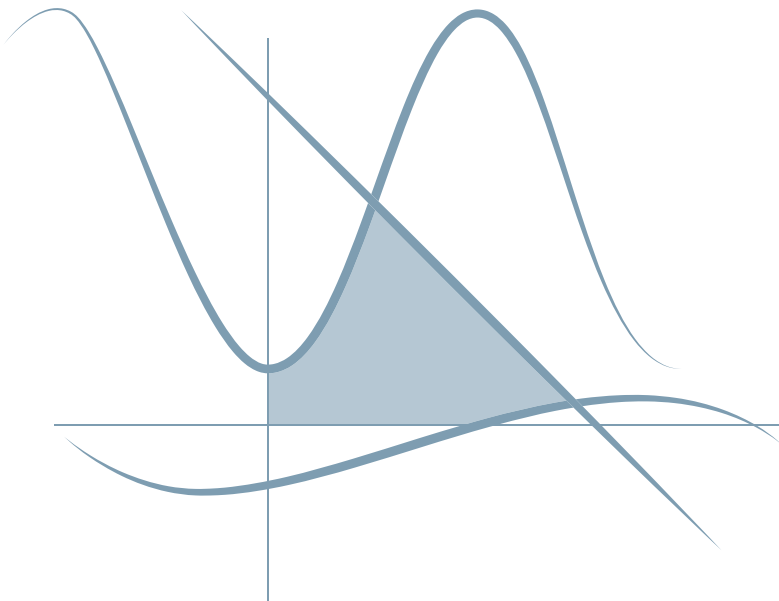


# Εισαγωγικό Κεφάλαιο

Επανάληψη από  
Προηγούμενες Τάξεις





«Τα μαθηματικά είναι η τέχνη  
να δίνεις το ίδιο όνομα  
σε διαφορετικά πράγματα.»

*Henri Poincaré*

### **Jules Henri Poincaré**

(1854 – 1912)

Γάλλος μαθηματικός από τους μεγαλύτερους όλων των εποχών, που μεγαλούργησε σαν καθηγητής-ερευνητής του Πανεπιστημίου του Παρισιού. Το έργο του στα Μαθηματικά σήμανε το τέλος της κλασικής εποχής στη συγκεκριμένη επιστήμη και άνοιξε το δρόμο στην ανάπτυξη των σύγχρονων μαθηματικών. Ελάχιστοι μαθηματικοί είχαν την πνοή της φιλοσοφικής ενατένισης με την οποία ήταν προικισμένος ο Πουανκαρέ και κανένας δεν είχε σε τέτοιο βαθμό το χάρισμα της σαφούς έκθεσης.

## Σταθερές

$$\pi = 3,14... \quad e = 2,71... \quad \sqrt{2} = 1,41... \quad \sqrt{3} = 1,73... \quad \pi^{\text{rad}} = 180^\circ$$

## Ταυτότητες

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών ονομάζεται **ταυτότητα**. Οι πιο σημαντικές ταυτότητες είναι:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

## Ιδιότητες των Ανισοτήτων

- $\alpha^2 \geq 0$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  και  $\beta = 0$
- $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$  ή  $\beta \neq 0$
- Αν  $\alpha > \beta$  και  $\beta > \gamma$ , τότε  $\alpha > \gamma$
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν  $\gamma > 0$ , τότε:  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
- Αν  $\gamma < 0$ , τότε:  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
- Αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$ , τότε:  $\alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Αν  $\alpha > \beta > 0$  και  $\gamma > \delta > 0$ , τότε  $\alpha\gamma > \beta\delta$
- Αν  $\alpha, \beta > 0$  και  $v \in \mathbb{N}^*$ , τότε:  $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^v > \beta^v$
- Αν  $\alpha, \beta > 0$  και  $v \in \mathbb{N}^*$ , τότε:  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^v = \beta^v$

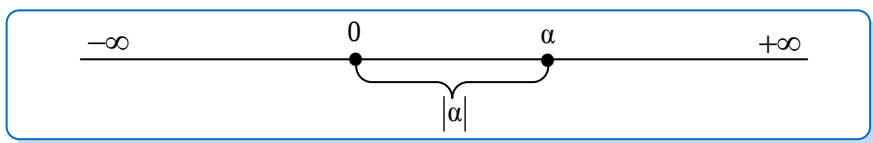
- Αν  $\alpha\beta > 0$ , τότε  $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$
- $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  
Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν  $\alpha = \beta$ .
- $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$  για κάθε  $\alpha > 0$ .  
Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν  $\alpha = 1$ .

## Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

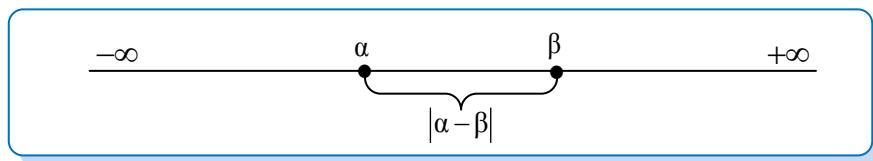
Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού  $\alpha$  συμβολίζεται με  $|\alpha|$  και ορίζεται από τον τύπο

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

- Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή του  $\alpha$  παριστάνει την απόσταση της εικόνας του αριθμού  $\alpha$  από την εικόνα του αριθμού 0.



- Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή της διαφοράς  $\alpha - \beta$  παριστάνει την απόσταση των αριθμών  $\alpha$  και  $\beta$ .



## Ιδιότητες

- $|\alpha| = |- \alpha| \geq 0$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $|\alpha| \geq \alpha$  και  $|\alpha| \geq -\alpha$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$
- Αν  $\theta > 0$ , τότε  $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$  ή  $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$  ή  $x = -\alpha$

- $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$  για κάθε  $α, β \in \mathbb{R}$
- $\left| \frac{α}{β} \right| = \frac{|α|}{|β|}$  για κάθε  $α, β \in \mathbb{R}$  με  $β \neq 0$
- $|α + β| \leq |α| + |β|$  για κάθε  $α, β \in \mathbb{R}$
- Αν  $θ > 0$ , τότε  $|x| < θ \Leftrightarrow -θ < x < θ$
- Αν  $θ > 0$ , τότε  $|x| > θ \Leftrightarrow x > θ$  ή  $x < -θ$

## Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Αν  $α \geq 0$ , η  $\sqrt{α}$  παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης  $x^2 = α$ .

### Ιδιότητες

- $\sqrt{α^2} = |α|$  για κάθε  $α \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{α} \cdot \sqrt{β} = \sqrt{αβ}$  για κάθε  $α, β \geq 0$
- $\frac{\sqrt{α}}{\sqrt{β}} = \sqrt{\frac{α}{β}}$  για κάθε  $α \geq 0$  και  $β > 0$ .

Αν  $α \geq 0$ , η  $\sqrt[n]{α}$  παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης  $x^n = α$ .

### Ιδιότητες

- Αν  $α \geq 0$ , τότε  $(\sqrt[n]{α})^n = α$  και  $\sqrt[n]{α^n} = α$
- Αν  $α \leq 0$  και  $n$  άρτιος, τότε  $\sqrt[n]{α^n} = |α|$
- $\sqrt[n]{α} \cdot \sqrt[n]{β} = \sqrt[n]{αβ}$  για κάθε  $α, β \geq 0$
- $\frac{\sqrt[n]{α}}{\sqrt[n]{β}} = \sqrt[n]{\frac{α}{β}}$  για κάθε  $α \geq 0$  και  $β > 0$
- $\sqrt[n]{α^n β} = α \sqrt[n]{β}$  για κάθε  $α, β \geq 0$

Για κάθε  $α > 0$ ,  $μ \in \mathbb{Z}$  και  $n \in \mathbb{N}^*$ , ορίζουμε  $α^{\frac{μ}{n}} = \sqrt[n]{α^μ}$ .

Επίσης, για κάθε  $μ, n \in \mathbb{N}^*$ , ορίζουμε  $0^{\frac{μ}{n}} = \sqrt[n]{0^μ} = 0$ .

## Η Εξίσωση $x^v = a$

- Αν  $a > 0$  και  $v$  περιττός φυσικός αριθμός, τότε

$$x^v = a \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{a}.$$

- Αν  $a > 0$  και  $v$  άρτιος φυσικός αριθμός, τότε

$$x^v = a \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[v]{a}.$$

- Αν  $a < 0$  και  $v$  περιττός φυσικός αριθμός, τότε

$$x^v = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[v]{|a|}.$$

- Αν  $a < 0$  και  $v$  άρτιος φυσικός αριθμός, τότε η εξίσωση  $x^v = a$  είναι αδύνατη.

## Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> Βαθμού

Έστω η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  με διακρίνουσα  $\Delta = b^2 - 4a\gamma$ .

- Αν  $\Delta > 0$ , η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν  $\Delta = 0$ , η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

- Αν  $\Delta < 0$ , η εξίσωση είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}$ .

- Αν η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  έχει πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2$  ισχύουν οι τύποι

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta.

## Ανισώσεις 2<sup>ου</sup> Βαθμού

Έστω το τριώνυμο  $ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  με διακρίνουσα

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma$$

- Αν  $\Delta > 0$ , τότε

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

όπου  $x_1, x_2$  οι ρίζες του τριωνύμου.

Στην περίπτωση αυτή το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

| x                    | $-\infty$        | $x_1$ | $x_2$             | $+\infty$        |
|----------------------|------------------|-------|-------------------|------------------|
| $ax^2 + bx + \gamma$ | πρόσημο<br>του α | 0     | πρόσημο<br>του -α | πρόσημο<br>του α |

- Αν  $\Delta = 0$ , τότε

$$ax^2 + bx + \gamma = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2$$

Στην περίπτωση αυτή το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

| x                    | $-\infty$        | $-\frac{\beta}{2a}$ | $+\infty$        |
|----------------------|------------------|---------------------|------------------|
| $ax^2 + bx + \gamma$ | πρόσημο<br>του α | 0                   | πρόσημο<br>του α |

- Αν  $\Delta < 0$ , τότε

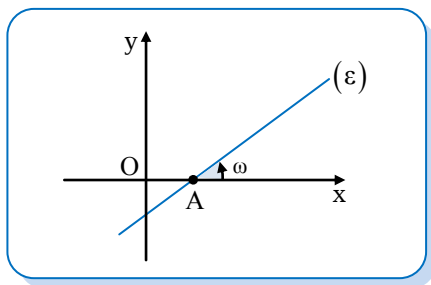
$$ax^2 + bx + \gamma = a\left[\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right].$$

Στην περίπτωση αυτή το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

| x                    | $-\infty$        | $+\infty$ |
|----------------------|------------------|-----------|
| $ax^2 + bx + \gamma$ | πρόσημο<br>του α |           |

## Εξίσωση Ευθείας

- Έστω  $(\varepsilon)$  μία ευθεία που τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A$ . Ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει η  $(\varepsilon)$  με τον άξονα  $x'x$** , τη γωνία  $\omega$  που διαγράφει η ημιευθεία  $Ax$ , όταν στραφεί γύρω από το  $A$  κατά τη θετική φορά μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon)$ . Αν η ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$  ή συμπίπτει με αυτόν, τότε ορίζουμε  $\omega = 0^\circ$ . Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση ισχύει



$$0^\circ \leq \omega < 180^\circ.$$

Ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** ή **κλίση** μιας ευθείας  $(\varepsilon)$  τον αριθμό

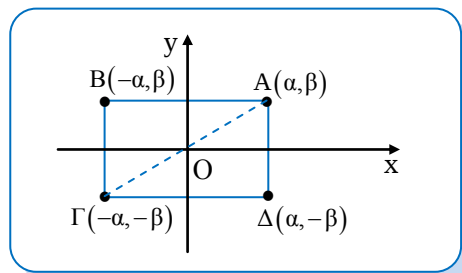
$$\alpha = \varepsilon\omega, \quad \omega \neq 90^\circ.$$

Αν  $\omega = 90^\circ$ , δηλαδή αν η ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι κάθετη στον άξονα  $x'x$ , τότε δεν ορίζουμε γι' αυτήν συντελεστή διεύθυνσης.

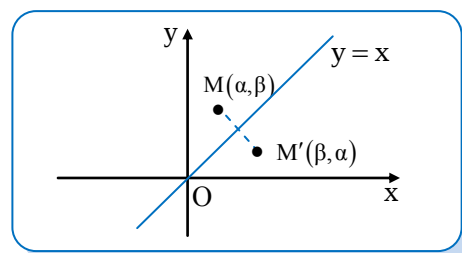
- Η εξίσωση  $y = ax + \beta$  παριστάνει ευθεία η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\alpha$  και τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $B(0, \beta)$ .
- Η εξίσωση  $y = \beta$  παριστάνει ευθεία η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$  όταν  $\beta \neq 0$  ή συμπίπτει με αυτόν όταν  $\beta = 0$ .
- Η ευθεία  $y = ax$  παριστάνει ευθεία η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\alpha$  και διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$ .
- Έστω οι ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  με εξισώσεις  $y = \alpha_1 x + \beta_1, y = \alpha_2 x + \beta_2$  αντίστοιχα. Έχουμε:
  - $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , αν και μόνο αν οι ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  τέμνονται.
  - $\alpha_1 = \alpha_2$  και  $\beta_1 \neq \beta_2$ , αν και μόνο αν οι ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  είναι παράλληλες.
  - $\alpha_1 = \alpha_2$  και  $\beta_1 = \beta_2$ , αν και μόνο αν οι ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  ταυτίζονται.

## Καρτεσιανές Συντεταγμένες

- Συμμετρία ως προς άξονες  
 $x'x$ ,  $y'y$
- Συμμετρία ως προς την αρχή  
των αξόνων  $O(0,0)$



- Συμμετρία ως προς την ευθεία  
 $y = x$
- Η απόσταση των σημείων  $A(x_1, y_1)$   
και  $B(x_2, y_2)$  δίνεται από τον τύπο



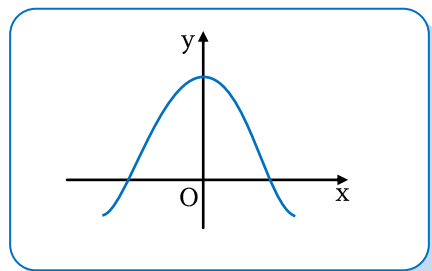
$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

## Άρτιες και Περιττές Συναρτήσεις

Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$ , λέγεται **άρτια** αν και μόνο αν για κάθε  $x \in A$  ισχύει

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

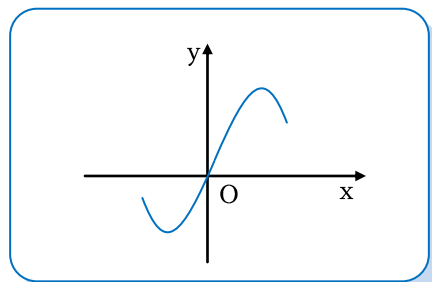
- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα  $y'y$ .



Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$ , λέγεται **περιττή** αν και μόνο αν για κάθε  $x \in A$  ισχύει

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.



## Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

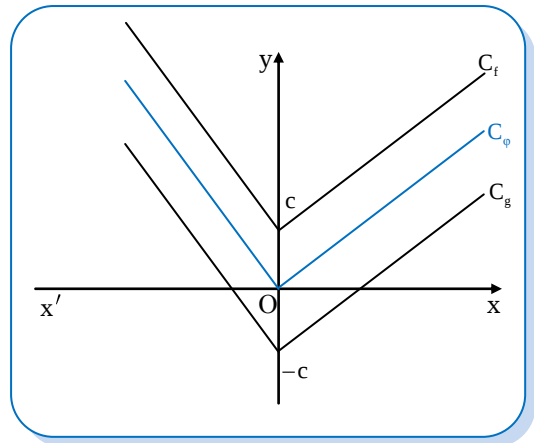
$$f(x) = \varphi(x) + c,$$

όπου  $c > 0$ , προκύπτει από μία **κατακόρυφη μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  κατά  $c$  μονάδες προς τα πάνω.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \varphi(x) - c$$

όπου  $c > 0$ , προκύπτει από μία **κατακόρυφη μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  κατά  $c$  μονάδες προς τα κάτω.



- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

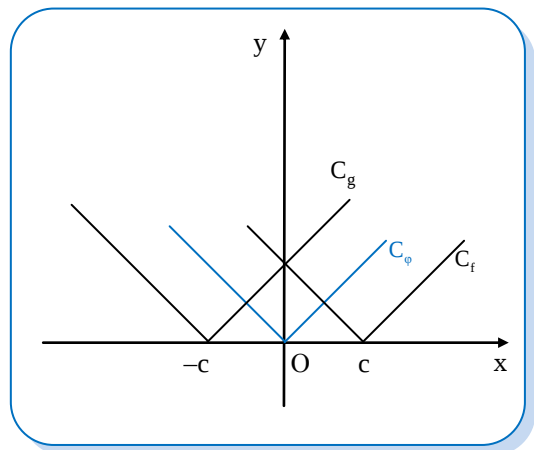
$$f(x) = \varphi(x - c),$$

όπου  $c > 0$  προκύπτει από μία **οριζόντια μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  κατά  $c$  μονάδες προς τα δεξιά.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \varphi(x + c),$$

όπου  $c > 0$ , προκύπτει από μία **οριζόντια μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  κατά  $c$  μονάδες προς τα αριστερά.



## Μονάδες Μέτρησης Γωνιών

- Χρησιμοποιούμε δύο μονάδες μέτρησης γωνιών.  
Τη μοίρα ( $1^\circ$ ) και το ακτίνιο ( $1^{\text{rad}}$ ).
- Έστω γωνία  $\omega$  η οποία είναι  $\mu$  μοιρών και  $\alpha$  ακτινίων. Ισχύει ο τύπος.

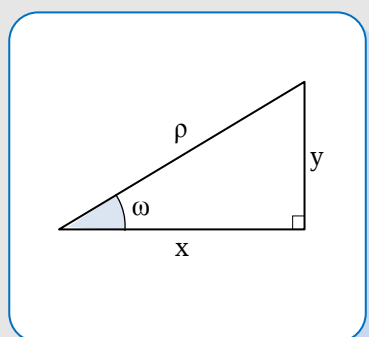
$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}.$$

## Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας $\omega$ με $0^\circ < \omega < 90^\circ$

Έστω  $\omega$  οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου,  $x$  η προσκείμενή της κάθετη πλευρά,  $y$  η απέναντί της κάθετη πλευρά και  $\rho$  η υποτείνουσα.

Ονομάζουμε **ημίτονο**, **συνημίτονο**, **εφαπτομένη** και **συνεφαπτομένη** της γωνίας  $\omega$  και συμβολίζουμε με **ημω**, **συνω**, **εφω** και **σφω** αντίστοιχα τα πηλίκα:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \quad \text{και} \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y}.$$



## Τριγωνομετρικός Κύκλος

- Ένας κύκλος λέγεται **τριγωνομετρικός** όταν έχει κέντρο την αρχή  $O(0,0)$  ενός συστήματος συντεταγμένων  $Oxy$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .
- Έστω γωνία  $\omega$ , της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο  $M(x, y)$ . Παρατηρούμε ότι:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{1} = y$$

και

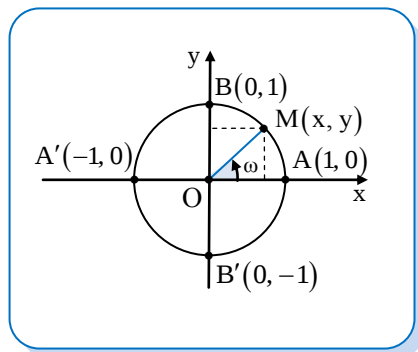
$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{1} = x.$$

Δηλαδή,

**$\sigma\upsilon\nu\omega = x = \text{τετμημένη του σημείου } M$**

και

**$\eta\mu\omega = y = \text{τεταγμένη του σημείου } M$**



Για το λόγο αυτό ο άξονας  $x'x$  λέγεται και **άξονας των συνημιτόνων**, ενώ ο άξονας  $y'y$  λέγεται και **άξονας των ημιτόνων**.

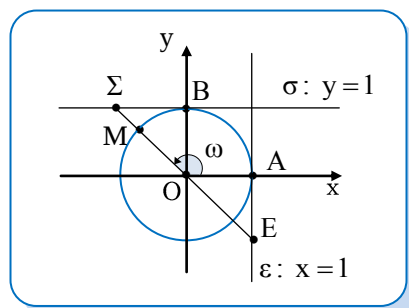
- Οι τιμές του  $\sin \omega$  και του  $\eta \mu \omega$  δεν μπορούν να υπερβούν κατ' απόλυτη τιμή την ακτίνα  $\rho = 1$  του τριγωνομετρικού κύκλου. Δηλαδή, για κάθε  $\omega \in \mathbb{R}$ , ισχύει:

$$|\sin \omega| \leq 1 \quad \text{ή} \quad -1 \leq \sin \omega \leq 1$$

και

$$|\eta \mu \omega| \leq 1 \quad \text{ή} \quad -1 \leq \eta \mu \omega \leq 1$$

- Έστω γωνία  $\omega$ , της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο  $M(x, y)$ . Θεωρούμε την εφαπτομένη  $\varepsilon: x=1$  του κύκλου στο σημείο  $A(1,0)$  και την εφαπτομένη  $\sigma: y=1$  στο σημείο  $B(0,1)$ .



- Αν η ευθεία OM τέμνει την  $(\varepsilon)$  στο σημείο E, τότε ισχύει

$$\varepsilon \phi \omega = \text{τεταγμένη του σημείου E.}$$

Για το λόγο αυτό η ευθεία  $\varepsilon: x=1$  λέγεται **άξονας των εφαπτομένων**.

- Αν η ευθεία OM τέμνει την  $(\sigma)$  στο σημείο Σ, τότε ισχύει

$$\sigma \phi \omega = \text{τετμημένη του σημείου Σ.}$$

Για το λόγο αυτό η ευθεία  $\sigma: y=1$  λέγεται **άξονας των συνεφαπτομένων**.

- Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας  $\omega$ , ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

|                           | Τεταρτημόρια |         |          |          |
|---------------------------|--------------|---------|----------|----------|
|                           | $\alpha$     | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ |
| $\eta \mu \omega$         | +            | +       | -        | -        |
| $\sin \omega$             | +            | -       | -        | +        |
| $\varepsilon \phi \omega$ | +            | -       | +        | -        |
| $\sigma \phi \omega$      | +            | -       | +        | -        |

## Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Βασικών Γωνιών

| Γωνία $\omega$ |                 | Τριγωνομετρικοί αριθμοί |                           |                         |                       |
|----------------|-----------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|-----------------------|
| σε μοίρες      | σε rad          | $\eta\mu\omega$         | $\sigma\upsilon\nu\omega$ | $\epsilon\varphi\omega$ | $\sigma\varphi\omega$ |
| $0^\circ$      | 0               | 0                       | 1                         | 0                       | Δεν ορίζεται          |
| $30^\circ$     | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$           | $\frac{\sqrt{3}}{2}$      | $\frac{\sqrt{3}}{3}$    | $\sqrt{3}$            |
| $45^\circ$     | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$    | $\frac{\sqrt{2}}{2}$      | 1                       | 1                     |
| $60^\circ$     | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$    | $\frac{1}{2}$             | $\sqrt{3}$              | $\frac{\sqrt{3}}{3}$  |
| $90^\circ$     | $\frac{\pi}{2}$ | 1                       | 0                         | Δεν ορίζεται            | 0                     |

## Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$
- $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$
- $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$
- $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$
- $\epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$
- $\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$

## Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή,

- $\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$
- $\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$

Οι γωνίες με άθροισμα  $180^\circ$  έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή,

- $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$
- $\sigma\phi(180^\circ - \omega) = -\sigma\phi\omega$

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά  $180^\circ$  έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη. Δηλαδή,

- $\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$
- $\epsilon\phi(180^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$
- $\sigma\phi(180^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$

Στις γωνίες με άθροισμα  $90^\circ$  το ημίτονο καθεμιάς ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη καθεμιάς με τη συνεφαπτομένη της άλλης. Δηλαδή,

- $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
- $\epsilon\phi(90^\circ - \omega) = \sigma\phi\omega$
- $\sigma\phi(90^\circ - \omega) = \epsilon\phi\omega$

## Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέγεται **περιοδική** αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $T > 0$  τέτοιος, ώστε για κάθε  $x \in A$  να ισχύει

$$x + T \in A, \quad x - T \in A \quad \text{και} \quad f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

Ο πραγματικός αριθμός  $T$  λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης  $f$ .

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \rho \eta\mu\alpha x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{όπου } \alpha, \rho \text{ σταθεροί θετικοί αριθμοί.}$$

- Η συνάρτηση  $f$  έχει μέγιστη τιμή ίση με  $\rho$  και ελάχιστη τιμή ίση με  $-\rho$ .
- Η συνάρτηση  $f$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ .

Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν και για τη συνάρτηση

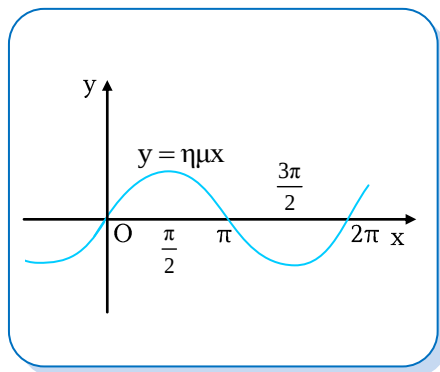
$$f(x) = \rho \sigma\upsilon\nu\alpha x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{όπου } \alpha, \rho \text{ σταθεροί θετικοί αριθμοί.}$$

Η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x$$

είναι:

- περιοδική με περίοδο  $2\pi$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right]$ .

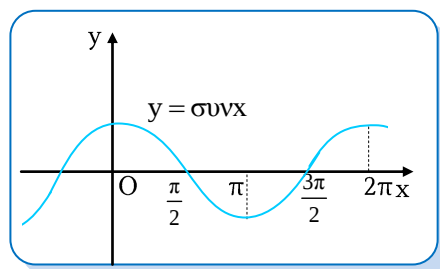


Η συνάρτηση

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

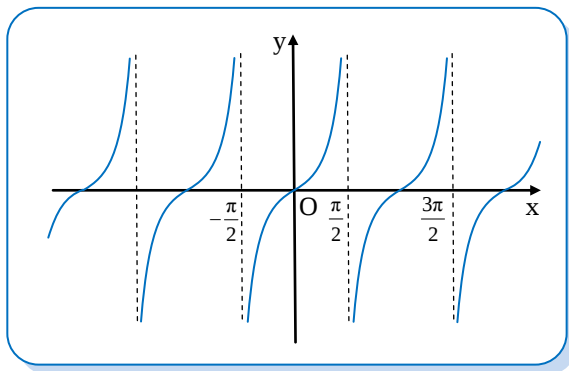
είναι:

- περιοδική με περίοδο  $2\pi$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[0, \pi]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[\pi, 2\pi]$ .



Η συνάρτηση  $f(x) = \epsilon\phi x$  είναι:

- περιοδική με περίοδο  $\pi$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .



## Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

- Οι ρίζες της εξίσωσης  $\eta\mu x = \eta\mu\theta$  δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta, \kappa \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Οι ρίζες της εξίσωσης  $\sin x = \sin \theta$  δίνονται από τους τύπους
 
$$\begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi - \theta, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
- Οι ρίζες της εξίσωσης  $\cos x = \cos \theta$  δίνονται από τον τύπο
 
$$x = k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
- Από τον ίδιο τύπο δίνονται και οι ρίζες της εξίσωσης  $\sin x = \sin \theta$ .

## Πολυώνυμο

Ονομάζουμε **πολυώνυμο** του  $x$  κάθε παράσταση της μορφής

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

όπου  $n$  είναι ένας φυσικός αριθμός και  $a_0, a_1, \dots, a_n$  είναι πραγματικοί αριθμοί.

- Τα μονώνυμα

$$a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$$

λέγονται **όροι** του πολωνύμου και οι αριθμοί  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  **συντελεστές** αυτού. Ειδικότερα, ο αριθμός  $a_0$  λέγεται **σταθερός όρος** του πολωνύμου.

- Δύο πολωνύμα είναι **ίσα** αν και μόνο αν οι αντίστοιχοι συντελεστές τους είναι ίσοι.
- Ο **βαθμός** ενός πολωνύμου  $P(x)$  είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης μη μηδενικού μονωνύμου του  $P(x)$ .
- **Σταθερό πολωνύμο** λέγεται κάθε πολωνύμο της μορφής

$$P(x) = c \quad \text{με} \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Μηδενικού βαθμού πολωνύμο** λέγεται κάθε πολωνύμο της μορφής

$$P(x) = c \quad \text{με} \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

- **Μηδενικό πολωνύμο** λέγεται το πολωνύμο

$$P(x) = 0$$

για το οποίο δεν ορίζεται βαθμός.

- Ένας αριθμός  $\rho$  λέγεται **ρίζα** ενός πολωνύμου  $P(x)$  αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$P(\rho) = 0.$$

- Ονομάζουμε **αριθμητική τιμή** ενός πολωνύμου  $P(x)$  για  $x = \rho$ , τον πραγματικό αριθμό που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το  $x$  με τον αριθμό  $\rho$ .

## Διαίρεση Πολυωνύμων

### Θεώρημα (Ταυτότητα της διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων  $\Delta(x)$  και  $\delta(x)$  με  $\delta(x) \neq 0$  υπάρχουν δύο μοναδικά πολώνυμα  $\pi(x)$  και  $\upsilon(x)$  τέτοια, ώστε

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x),$$

όπου το  $\upsilon(x)$  ή είναι το μηδενικό πολώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του  $\delta(x)$ .

### Θεώρημα

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για  $x = \rho$ . Δηλαδή,  $\upsilon = P(\rho)$ .

### Θεώρημα

Ένα πολώνυμο  $P(x)$  διαιρείται με το  $x - \rho$  αν και μόνο αν το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$ . Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση  $P(\rho) = 0$ .

- Το σχήμα **Horner** είναι μία μέθοδος διαίρεσης πολυωνύμου  $P(x)$  με πολώνυμο της μορφής  $x - \rho$ .

## Πολυωνυμικές Εξισώσεις

**Πολυωνυμική εξίσωση** βαθμού  $n$  ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \text{ με } \alpha_n \neq 0$$

- **Ρίζα** αυτής της εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

δηλαδή κάθε αριθμό  $\rho$ , για τον οποίο ισχύει  $P(\rho) = 0$ .

### Θεώρημα (ακέραιων ριζών)

Αν ένας ακέραιος αριθμός  $\rho \neq 0$  είναι ρίζα ενός πολυωνύμου

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

με ακέραιους συντελεστές, τότε ο  $\rho$  είναι διαιρέτης του σταθερού όρου  $\alpha_0$ .

## Πρόσημο Γινομένου – Ανισώσεις Γινόμενο

- Για να μελετήσουμε ως προς το **πρόσημο** ένα γινόμενο

$$P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x),$$

όπου οι παράγοντες  $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$  είναι πολυώνυμα  $1^{\text{ου}}$  ή  $2^{\text{ου}}$  βαθμού βρίσκουμε χωριστά το πρόσημο κάθε παράγοντα και στη συνέχεια το πρόσημο του  $P(x)$  χρησιμοποιώντας τους γνωστούς κανόνες γινομένου προσήμων.

- Για να λύσουμε μια **ανίσωση γινόμενο** της μορφής

$$A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0 \text{ ή } < 0$$

όπου οι παράγοντες  $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$  είναι πολυώνυμα  $1^{\text{ου}}$  ή  $2^{\text{ου}}$  βαθμού, αρκεί να βρούμε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x).$$

## Κλασματικές Εξισώσεις

- Αρχικά βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της εξίσωσης.
- Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε όλα τα κλάσματα με το **Ε.Κ.Π. των παρονομαστών** και μετασχηματίζουμε την εξίσωση σε ισοδύναμη πολυωνυμική.

## Κλασματικές Ανισώσεις

- Αρχικά βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της ανίσωσης.
- Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε την ανίσωση σε ισοδύναμη που έχει τη μορφή

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \text{ ή } \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \text{ ή } \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \text{ ή } \frac{A(x)}{B(x)} \leq 0.$$

- Γνωρίζουμε ότι το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0 \quad \text{και} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0$$

αφού, καμία από τις λύσεις των ανισώσεων

$$A(x) \cdot B(x) > 0 \quad \text{και} \quad A(x) \cdot B(x) < 0$$

δεν μηδενίζει το  $B(x)$ .

- Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\blacksquare \quad \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad B(x) \neq 0$$

και

$$\blacksquare \quad \frac{A(x)}{B(x)} \leq 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \leq 0 \quad \text{και} \quad B(x) \neq 0$$

## Άρρητες Εξισώσεις

Πρόκειται για εξισώσεις με **ριζικά**, οι οποίες περιέχουν παραστάσεις του  $x$  στα υπόριζα. Για την επίλυση αυτών των εξισώσεων εργαζόμαστε ως εξής:

- Αρχικά βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της εξίσωσης.
- Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \tag{1}$$

από την οποία υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε την εξίσωση

$$A(x) = (B(x))^2 \tag{2}$$

η οποία δεν περιέχει ριζικά.

- Όμως η εξίσωση (2) προκύπτει ως **συνέπεια** και όχι ισοδύναμα από την εξίσωση (1) και η συνεπαγωγή **διευρύνει** το σύνολο των λύσεων μιας εξίσωσης. Δηλαδή, το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης (1) είναι υποσύνολο του συνόλου των λύσεων της εξίσωσης (2). Για αυτόν τον λόγο, είναι απαραίτητο να κάνουμε **επαλήθευση** των ριζών που βρίσκουμε από την εξίσωση (2) και να διαπιστώσουμε αν αυτές είναι ή δεν είναι ρίζες και της αρχικής εξίσωσης.
- Η εξίσωση  $\sqrt{A(x)} = B(x)$  είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{cases} A(x) = (B(x))^2 \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Η συνθήκη  $A(x) \geq 0$  είναι περιττή αφού καλύπτεται από τη σχέση

$$A(x) = (B(x))^2.$$

Με αυτό τον τρόπο **αποφεύγουμε τη διαδικασία της επαλήθευσης**, η οποία σε κάποιες περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα δύσκολη.

## Εκθετική Συνάρτηση

Ονομάζουμε **εκθετική συνάρτηση** με βάση έναν θετικό αριθμό  $a \neq 1$  τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

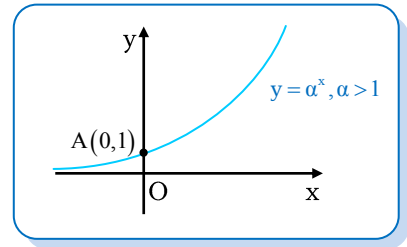
$$f(x) = a^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Η συνάρτηση  $f$  έχει σύνολο τιμών το  $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$
- Η εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = a^x \text{ με } a > 1$$

είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . Δηλαδή, για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ . Ισχύει λοιπόν η ισοδυναμία

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

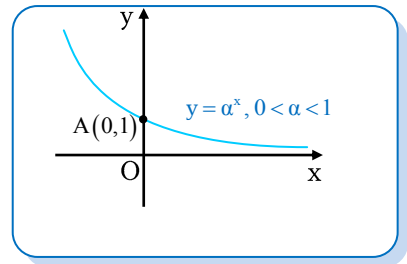


- Η εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = a^x \text{ με } 0 < a < 1$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ . Δηλαδή, για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) > f(x_2)$ . Ισχύει λοιπόν η ισοδυναμία

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2.$$



- Για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

δηλαδή

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

## Εκθετικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

### 1η Κατηγορία

Πρόκειται για εξισώσεις – ανισώσεις που μετασχηματίζονται στις μορφές

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \text{ή} \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

Τότε αξιοποιούμε:

- στις **εξισώσεις**, ιδιότητα των εκθετικών συναρτήσεων και λύνουμε την ισοδύναμη εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

- στις **ανισώσεις**, τη **μονοτονία** των εκθετικών συναρτήσεων και λύνουμε την ισοδύναμη ανίσωση

$$f(x) < g(x) \quad \text{ή} \quad f(x) > g(x),$$

ανάλογα με το αν  $a > 1$  ή  $0 < a < 1$ .

### Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση  $8^x = 32^{x+2}$ .

#### Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} 8^x = 32^{x+2} &\Leftrightarrow (2^3)^x = (2^5)^{x+2} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{5(x+2)} \\ &\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{5x+10} \Leftrightarrow f(3x) = f(5x+10) \end{aligned}$$

όπου  $f(x) = 2^x$ . Και επειδή, η εκθετική συνάρτηση  $f(x) = 2^x$  είναι 1-1 η τελευταία εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$3x = 5x + 10 \Leftrightarrow -2x = 10 \Leftrightarrow x = -5.$$

### Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση  $e^{x^2-4x} < 1$ .

#### Λύση

Έχουμε

$$e^{x^2-4x} < 1 \Leftrightarrow e^{x^2-4x} < e^0 \Leftrightarrow f(x^2-4x) < f(0)$$

όπου,  $f(x) = e^x$ . Και επειδή, η εκθετική συνάρτηση  $f(x) = e^x$  είναι γνησίως αύξουσα ( $e > 1$ ) η τελευταία ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow x(x-4) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

## 2η Κατηγορία

Πρόκειται για εξισώσεις – ανισώσεις που μετασχηματίζονται στις μορφές

$$\kappa \cdot a^{2f(x)} + \lambda \cdot a^{f(x)} + \mu = 0$$

$$\text{ή} \quad \kappa \cdot a^{2f(x)} + \lambda \cdot a^{f(x)} + \mu < 0 \quad \text{ή} \quad \kappa \cdot a^{2f(x)} + \lambda \cdot a^{f(x)} + \mu > 0.$$

Τότε, εκτελούμε την αντικατάσταση  $a^{f(x)} = \omega$  και οδηγούμαστε αρχικά σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις ή ανισώσεις με άγνωστο το  $\omega$ .

Παρόμοια διαδικασία ακολουθούμε και σε εξισώσεις – ανισώσεις της μορφής

$$\kappa \cdot a^{3f(x)} + \lambda \cdot a^{2f(x)} + \mu \cdot a^{f(x)} + \nu = 0 \quad \text{ή} \quad > 0 \quad \text{ή} \quad < 0 \quad \text{κ.λπ.}$$

**Παράδειγμα**

Να λύσετε την εξίσωση

$$3^{2x+3} + 26 \cdot 3^x - 1 = 0.$$

**Λύση**

Έχουμε

$$\begin{aligned} 3^{2x+3} + 26 \cdot 3^x - 1 = 0 &\Leftrightarrow 3^3 \cdot 3^{2x} + 26 \cdot 3^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 27 \cdot (3^x)^2 + 26 \cdot 3^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Θέτοντας  $3^x = \omega$  η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$27\omega^2 + 26\omega - 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = -1 \text{ ή } \omega = \frac{1}{27}.$$

- Για  $\omega = -1$  έχουμε  $3^x = -1$  που είναι αδύνατο, αφού ο αριθμός  $-1$  δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της εκθετικής συνάρτησης που είναι το διάστημα  $(0, +\infty)$ .
- Για  $\omega = \frac{1}{27}$  έχουμε

$$3^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-3} \Leftrightarrow x = -3.$$

**Παράδειγμα**

Να λύσετε την ανίσωση

$$2^{1+x} + 2^{1-x} < 5.$$

**Λύση**

Έχουμε

$$\begin{aligned} 2^{1+x} + 2^{1-x} < 5 &\Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + \frac{2}{2^x} < 5 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} + 2 < 5 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 < 0 \end{aligned}$$

Θέτοντας  $2^x = \omega$  η τελευταία ανίσωση γράφεται

$$2\omega^2 - 5\omega + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \omega < 2.$$

Δηλαδή

$$\frac{1}{2} < 2^x < 2 \Leftrightarrow 2^{-1} < 2^x < 2^1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

## Λογάριθμοι

Ο  $\ln \theta$  είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον αριθμό  $e$  για να βρούμε τον θετικό αριθμό  $\theta$ . Δηλαδή, αν  $\theta > 0$ , τότε

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

- $\ln e^x = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $e^{\ln \theta} = \theta$  για κάθε  $\theta > 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln(\theta_1 \theta_2) = \ln \theta_1 + \ln \theta_2$  για κάθε  $\theta_1, \theta_2 > 0$
- $\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \ln \theta_1 - \ln \theta_2$  για κάθε  $\theta_1, \theta_2 > 0$
- $\ln \theta^k = k \ln \theta$  για κάθε  $\theta > 0$  και  $k \in \mathbb{R}$

## Η Λογαριθμική Συνάρτηση $f(x) = \ln x$

Ονομάζουμε **λογαριθμική συνάρτηση** με βάση τον αριθμό  $e$  τη συνάρτηση

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

με τύπο

$$f(x) = \ln x \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

- Η συνάρτηση  $f$  έχει σύνολο τιμών το  $f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$ .
- Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα. Δηλαδή, για κάθε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει

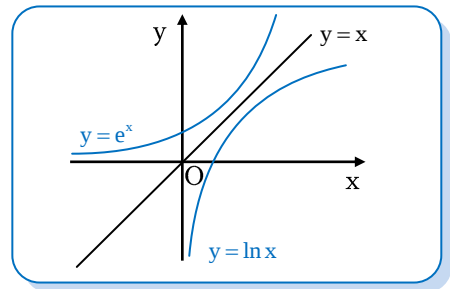
$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ισχύει λοιπόν η ισοδυναμία  $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ .

- Για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει η ισοδυναμία  $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ , δηλαδή

$$\ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

- Οι καμπύλες με εξισώσεις  $y = \ln x$  και  $y = e^x$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ .



## Λογαριθμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

### 1η Κατηγορία

Πρόκειται για εξισώσεις – ανισώσεις που μετασχηματίζονται με τις ιδιότητες των λογαρίθμων στις μορφές

$$\log f(x) = \log g(x) \quad \text{ή} \quad \ln f(x) = \ln g(x)$$

$$\log f(x) < \log g(x) \quad \text{ή} \quad \ln f(x) < \ln g(x)$$

- Αρχικά, πριν μετασχηματίσουμε την εξίσωση ή την ανίσωση, βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της.
- Κατόπιν αξιοποιούμε:
  - στις **εξισώσεις**, ιδιότητα των λογαριθμικών συναρτήσεων και λύνουμε την ισοδύναμη εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .
  - στις **ανισώσεις**, τη **μονοτονία** των λογαριθμικών συναρτήσεων (γνησίως αύξουσες) και λύνουμε την ισοδύναμη ανίσωση  $f(x) < g(x)$ .

### Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln(4x - x^2) = 2 \ln 2 + \ln(x - 1).$$

### Λύση

- Η εξίσωση ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε
 
$$4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(4 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$$
 και
 
$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Δηλαδή, για κάθε  $x \in (1, 4)$ .

- Για αυτά τα  $x$  η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\ln(4x - x^2) = \ln 2^2 + \ln(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(4x - x^2) = \ln[4(x - 1)]$$

$$\Leftrightarrow 4x - x^2 = 4(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x - x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 = 4$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς  $-2$  και  $2$ . Όμως  $x \in (1, 4)$  και συνεπώς η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα. Τον αριθμό  $2$ .

## 2η Κατηγορία

Πρόκειται για εξισώσεις – ανισώσεις που εμφανίζουν **δυνάμεις** λογαρίθμων.

- Αρχικά, βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της εξίσωσης ή της ανίσωσης.
- Κατόπιν αξιοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων εμφανίζουμε **δυνάμεις** του **ίδιου λογάριθμου** και εκτελώντας κατάλληλη **αντικατάσταση** οδηγούμαστε στη λύση πολωνυμικής εξίσωσης – ανίσωσης.

### Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{\ln x - 3} \geq e^3.$$

### Λύση

- Η ανίσωση ορίζεται για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .
- Για αυτά τα  $x$  η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\ln x - 3} &\geq \ln e^3 \Leftrightarrow (\ln x - 3)\ln\left(\frac{x}{e}\right) \geq \ln e^3 \\ &\Leftrightarrow (\ln x - 3)(\ln x - \ln e) \geq 3\ln e \\ &\Leftrightarrow (\ln x - 3)(\ln x - 1) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \ln^2 x - 4\ln x \geq 0 \end{aligned}$$

Θέτοντας  $\ln x = \omega$  η παραπάνω ανίσωση γράφεται

$$\omega^2 - 4\omega \geq 0 \Leftrightarrow \omega(\omega - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \omega \leq 0 \text{ ή } \omega \geq 4.$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \ln x \leq 0 \quad \text{ή} \quad \ln x \geq 4 \\ \Leftrightarrow \ln x \leq \ln 1 \quad \text{ή} \quad \ln x \geq \ln e^4 \\ \Leftrightarrow x \leq 1 \quad \text{ή} \quad x \geq e^4. \end{aligned}$$

Όμως,

$$x \in (0, +\infty) \Leftrightarrow x > 0.$$

Επομένως, η δοθείσα ανίσωση έχει λύση τους αριθμούς

$$x \in (0, 1] \cup [e^4, +\infty).$$