

ΜΟΝΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

$$1. \alpha. \left[\begin{aligned} 3x(x-2) - (2x-1)(x+4) &= \\ = 3x^2 - 6x - (2x^2 + 8x - x - 4) &= \\ = 3x^2 - 6x - 2x^2 - 8x + x + 4 &= \\ = x^2 - 13x + 4 \end{aligned} \right]$$

$$\beta. \left[\begin{aligned} (2a+b)(a-b+2) - (3a-2b)(a+4b) &= \\ = (2a^2 - 2ab + 4a + ab - b^2 + 2b) - (3a^2 + 12ab - 2ba - 8b^2) &= \\ = 2a^2 - 2ab + 4a + ab - b^2 + 2b - 3a^2 - 12ab + 2ba + 8b^2 &= \\ = -a^2 + 7b^2 + 4a + 2b - 11ab \end{aligned} \right]$$

$$2. \alpha. (a+3)^2 = a^2 + 2a \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9,$$

$$\beta. (x-2)^2 = x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\gamma. (3a-2b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2,$$

$$\delta. (a+2)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot 2 + 3a \cdot 2^2 + 2^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8,$$

$$\epsilon. (2x-1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 - 1^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1,$$

$$\sigma\tau. (x+5)(x-5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25,$$

$$\zeta. (2b+5)(5-2b) = 5^2 - (2b)^2 = 25 - 4b^2$$

$$\eta. (-a-4)(a-4) = -(a+4)(a-4) = -(a^2 - 4^2) = -(a^2 - 16) = -a^2 + 16$$

$$\theta. \left[\begin{aligned} (y-2x)(y+2x)(y^2+4x^2) &= [y^2 - (2x)^2](y^2+4x^2) = \\ = (y^2 - 4x^2)(y^2+4x^2) &= (y^2)^2 - (4x^2)^2 = y^4 - 16x^4 \end{aligned} \right]$$

$$3. \alpha. \left[\begin{aligned} (x+2)^2 - (x-3)(x+3) - (1-2x)^2 &= \\ = (x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2) - (x^2 - 3^2) - [1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2x + (2x)^2] &= \\ = \dots = x^2 + 4x + 4 - x^2 + 9 - 1 + 4x - 4x^2 &= \\ = -4x^2 + 8x + 12 \end{aligned} \right]$$

β.

$$\left[\begin{aligned} & (a-2)^3 - (2a+1)(a+1)^2 + (a^2+1)(a+1)(a-1) = \\ & = (a^3 - 3a^2 \cdot 2 + 3a \cdot 2^2 - 2^3) - (2a+1)(a^2+2a+1) + (a^2+1)(a^2-1^2) = \\ & = (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) - (2a^3 + 4a^2 + 2a + a^2 + 2a + 1) + (a^2+1)(a^2-1) = \\ & = a^3 - 6a^2 + 12a - 8 - 2a^3 - 4a^2 - 2a - a^2 - 2a - 1 + [(a^2)^2 - 1^2] = \\ & = a^3 - 6a^2 + 12a - 8 - 2a^3 - 4a^2 - 2a - a^2 - 2a - 1 + a^4 - 1 \\ & = a^4 - a^3 - 11a^2 + 8a - 10 \end{aligned} \right]$$

$$4. \alpha. \left[\begin{aligned} & (3-2a)^2 - (4+a)(a-4) = (2a+5)^2 - a(a+3) - 29a \\ & (9-12a+4a^2) - (a^2-16) = (4a^2+20a+25) - a^2 - 3a - 29a \\ & 9-12a+4a^2 - a^2 + 16 = 4a^2+20a+25 - a^2 - 3a - 29a \\ & 3a^2 - 12a + 25 = 3a^2 - 12a + 25 \end{aligned} \right]$$

Αφού καταλήξαμε σε μια ισότητα που ισχύει συμπεραίνουμε ότι ισχύει και η αρχική ισότητα που θέλαμε να αποδείξουμε.

$$\beta. \left[\begin{aligned} & \sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{7}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{7}+2} = \\ & = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} = \\ & = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 2^2} = \\ & = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7-4} = \\ & = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3 \end{aligned} \right]$$

5. Είναι $\alpha + \beta = 2$ ή $\alpha = 2 - \beta$ (λύνουμε τη σχέση που ξέρουμε ότι ισχύει ως προς α)

Αντικαθιστούμε στο πρώτο μέλος της ισότητας το α με το $2 - \beta$ δηλαδή με $2 - \beta$

$$\text{άρα έχουμε: } \left[\begin{aligned} & b^2 + 3a + 3b + ab = \\ & = b^2 + 3(2-b) + 3b + (2-b)b = \\ & = b^2 + 6 - 3b + 3b + 2b - b^2 = \\ & = 2b + 6 \end{aligned} \right]$$

ή

Μετατρέπουμε το πρώτο μέλος της ισότητας με στόχο να εμφανίσουμε το $a+b$ το οποίο μπορεί να αντικατασταθεί στη συνέχεια με τον αριθμό 2 (αφού $a+b=2$). Άρα:

$$\begin{aligned}b^2 + 3a + 3b + ab &= \\&= (b^2 + ab) + (3a + 3b) = \\&= b(b + a) + 3(a + b) = \\&= (a + b)(b + 3) = \\&= 2(b + 3) = \\&= 2b + 6\end{aligned}$$