

## Κεφάλαιο 3ο – Συναρτήσεις

### 3.1. Η έννοια της συνάρτησης

~

1. Ας υποθέσουμε ότι για τις εκδηλώσεις ενός πασχαλινού παζαριού, το τμήμα σας έχει αναλάβει να κατασκευάσει και να πουλήσει βραχιόλια και κομπολόγια, όπου το καθένα θα πωλείται προς 2,25 ευρώ. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα:

| Πλήθος αντικειμένων που θα πωληθούν | Έσοδα |
|-------------------------------------|-------|
| 0                                   | 0     |
| 1                                   | 2,25  |
| 2                                   | 4,5   |
| 3                                   | 6,75  |
| 4                                   | 9     |
| 8                                   | 18    |
| 17                                  | 38,25 |



Εξαρτημένη μεταβλητή καλείται η μεταβλητή που η τιμή της καθορίζεται από την τιμή που θα δώσουμε στην ανεξάρτητη μεταβλητή. Την ανεξάρτητη μεταβλητή τη συμβολίζουμε συνήθως με  $x$  και την εξαρτημένη με  $y$ .

Συνεπώς, τα **έσοδα εξαρτώνται** από το πλήθος των αντικειμένων που θα πουλήσετε. Άρα το πλήθος των αντικειμένων που θα πουλήσετε είναι η **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ τα έσοδα είναι η **εξαρτημένη μεταβλητή**. Μπορούμε να πούμε ότι:

**Τα έσοδα είναι συνάρτηση** του πλήθους των αντικειμένων που θα πουλήσετε.

2. Ένας εργαζόμενος αμείβεται με 4,75 ευρώ την ώρα.

α) Από τι εξαρτάται το ποσό της αμοιβής του;

|                         |      |      |       |    |
|-------------------------|------|------|-------|----|
| <b>x ώρες δουλειάς</b>  | 1    | 2    | 3     | 4  |
| <b>y αμοιβή σε ευρώ</b> | 4,75 | 9,50 | 14,25 | 19 |



3. Για να κάνουμε ένα ντους καταναλώνουμε 15 λίτρα νερό ανά λεπτό.

|                             |    |    |     |     |
|-----------------------------|----|----|-----|-----|
| x διάρκεια σε λεπτά         | 1  | 2  | 10  | 12  |
| y κατανάλωση νερού σε λίτρα | 15 | 30 | 150 | 180 |



Μία συνάρτηση είναι μία σχέση όπου κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής.



Δηλαδή, σε μία συνάρτηση, αν  $x$  είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και  $y$  είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, τότε μπορεί να υπάρχει **μόνο μία** τιμή της μεταβλητής  $y$  για κάθε τιμή της μεταβλητής  $x$ .

- 4α. Δίνονται οι ακόλουθοι πίνακες τιμών. Να προσδιορίσετε αν τα ζεύγη τιμών αποτελούν συνάρτηση.

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| x | 11 | 12 | 13 | 20 |
| y | -2 | -1 | 0  | 7  |

Είναι συνάρτηση.

|   |    |    |   |    |
|---|----|----|---|----|
| x | -2 | -3 | 6 | -2 |
| y | -1 | 0  | 3 | 1  |

Δεν είναι συνάρτηση.

- 4β. Να μελετήσετε τους προηγούμενους συμπληρωμένους πίνακες και στη συνέχεια να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων.

$$\psi = \chi - 13$$



Στα μαθηματικά η συνάρτηση είναι μία εξίσωση που περιγράφει την σχέση που συνδέει την ανεξάρτητη με την εξαρτημένη μεταβλητή.



Για να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης για κάποια συγκεκριμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής:

1. Αντικαθιστάτε την ανεξάρτητη μεταβλητή με την τιμή που σας δίνεται.
2. Εκτελείτε τις πράξεις και βρίσκετε την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής.



Μία συνάρτηση είναι μία σχέση όπου κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής.



Δηλαδή, σε μία συνάρτηση, αν  $x$  είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και  $y$  είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, τότε μπορεί να υπάρχει μόνο μία τιμή της μεταβλητής  $y$  για κάθε τιμή της μεταβλητής  $x$ .

5. α) Να σχεδιάσετε έναν πίνακα τιμών όπου τα ζεύγη τιμών αποτελούν συνάρτηση.
- β) Να σχεδιάσετε έναν πίνακα τιμών όπου τα ζεύγη τιμών δεν αποτελούν συνάρτηση.

| Αποτελούν Συνάρτηση |    |
|---------------------|----|
| x                   | y  |
| 2                   | 6  |
| 3                   | 9  |
| 4                   | 12 |
| 5                   | 15 |
| 6                   | 18 |
| 7                   | 21 |

| Δεν αποτελούν Συνάρτηση |    |
|-------------------------|----|
| x                       | y  |
| 2                       | -1 |
| 3                       | -2 |
| 4                       | -3 |
| 5                       | -2 |
| 6                       | -3 |
| 2                       | -8 |

6. Δίνεται η συνάρτηση  $y = 2x + 3$ . Να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης για  $x = 4$ .

$y = 2 \cdot 4 + 3, y = 11$ . Για  $x = 4, y = 11$ .

7. α) Να εξηγήσετε γιατί η σχέση  $\psi = 2x^2 - 7$  είναι συνάρτηση.

- β) Να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης για  $x = -4$ .

7α) Λύση: Είναι συνάρτηση γιατί κάθε τιμή του  $x$  αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή του  $\psi$ .

β)  $\psi = 2x^2 - 7$ , για  $x = -4, \psi = 2 \cdot (-4)^2 - 7, \psi = 2 \cdot 16 - 7, \psi = 32 - 7, \psi = 25$ . Για  $x = -4, \psi = 25$ .

8. Για τη συνάρτηση  $\psi = x^2 - 2$  να συμπληρώσετε τα κενά και των πίνακα τιμών.

Για  $x = -2$ , τότε  $\psi = (-2)^2 - 2, \psi = 4 - 2, \psi = 2$

Για  $x = -1$ , τότε  $\psi = (-1)^2 - 2, \psi = 1 - 2, \psi = -1$

Για  $x = 0$ , τότε  $\psi = 0^2 - 2, \psi = 0 - 2, \psi = -2$

Για  $x = 1$ , τότε  $\psi = 1^2 - 2, \psi = 1 - 2, \psi = -1$

Για  $x = 2$  τότε  $\psi = 2^2 - 2, \psi = 4 - 2, \psi = 2$

| x | -2 | -1 | 0  | 1  | 2 |
|---|----|----|----|----|---|
| ψ | 2  | -1 | -2 | -1 | 2 |

9. Δίνεται η συνάρτηση  $s = 2t + 3$ . Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

$$\begin{aligned} 2 &= 2t + 3, \\ -2t &= 3 - 2 \\ -2t &= 1 \\ -2t / -2 &= 1 / -2, \\ t &= -1/2 = -0,5 \end{aligned}$$

|   |      |      |     |    |    |
|---|------|------|-----|----|----|
| s | 2    | 0    | 4   | -3 | -1 |
| t | -0,5 | -1,5 | 0,5 | -3 | -2 |

10. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

$$\begin{aligned} -5 &= -5x + 20, \\ 5x &= 20 + 5, \\ 5x &= 25, \\ 5x / 5 &= 25 / 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

|              |    |    |    |   |    |    |    |
|--------------|----|----|----|---|----|----|----|
| x            | -5 | 5  | -3 | 3 | -1 | 2  | 0  |
| y = -5x + 20 | 45 | -5 | 35 | 5 | 25 | 10 | 20 |

$$\begin{aligned} 5 &= -5x + 20 \\ 5x &= 20 - 5 \\ 5x &= 15 \\ 5x / 5 &= 15 / 5 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

11. Οι τιμές ενός καταστήματος ηλεκτρονικών επιβαρύνονται με ΦΠΑ (Φόρο Προστιθέμενης Αξίας) 23%. Να εκφράσετε τις τιμές γ με ΦΠΑ, ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς ΦΠΑ.

$$\text{Λύση: } \psi = x + 23\%x, \quad \psi = x + 23/100x, \quad \psi = x + 0,23x, \quad \psi = 1,23x$$

12. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκη x και γ (σε cm). Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 60 cm, να εκφράσετε την πλευρά γ ως συνάρτηση της πλευράς x.

$$\text{Λύση: } \text{Περίμετρος} = x + x + \psi + \psi = 60$$

$$2x + 2\psi = 60$$

$$2(x + \psi) = 60$$

$$x + \psi = 60/2 = 30, \quad \psi = 30 - x$$

13. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκος  $x + 2$  cm και πλάτος  $x - 1$  cm.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο γ του ορθογωνίου συναρτήσει του x.

$$\text{Λύση: } \psi = 2(x + 2) + 2(x - 1)$$

$$\psi = x + 2 + x + 2 + x - 1 + x - 1$$

$$\psi = 2x + 4 + 2x - 2$$

$$\psi = 4x + 2$$

$$\psi = 4x + 2$$

β) Ποια η περίμετρος του ορθογωνίου αν  $x = 2$ ;

.....

γ) Για ποια τιμή του x το ορθογώνιο έχει περίμετρο 22 cm;

.....

.....

δ) Να συμπληρώσετε των παρακάτω πίνακα τιμών.

$$\psi = 4 \cdot 3 + 2$$

|   |   |    |   |    |    |
|---|---|----|---|----|----|
| x | 2 | 3  | 4 |    | 10 |
| y |   | 14 |   | 30 | 42 |

$$42 = 4x + 2$$

$$42 - 2 = 4x$$

$$40 = 4x$$

$$40/4 = 4x/4$$

$$10 = x$$

14. Κατά την ανακύκλωση ενός τόνου χαρτιού έχει υπολογιστεί ότι γλιτώνουμε 17 δέντρα, 26.320 λίτρα νερού, 1.753 λίτρα πετρελαίου, 587 κυβικά εκατοστά αέρα, 233 κυβικά μέτρα γης και 4.077 kw ενέργειας. Επιπλέον, **από κάθε κιλό χαρτιού που ανακυκλώνουμε, λαμβάνουμε χαρτόμαζα 700 γραμμαρίων(=0,700 κιλά=0,7 κιλά)**
- α) Πόσα **κιλά** χαρτόμαζας θα λάβουμε από την ανακύκλωση **500 κιλών χαρτιού**;
- β) Να εκφράσετε την ποσότητα γ σε κιλά χαρτόμαζας, που θα λάβουμε, ως συνάρτηση της ποσότητας x χαρτιού που δίνουμε για ανακύκλωση.
- γ) Πόσα κιλά χαρτιού πρέπει να δώσουμε για ανακύκλωση, ώστε να πάρουμε 250 κιλά χαρτόμαζας;

**ΛΥΣΗ: Αν χ είναι τα κιλά χαρτιού και ψ είναι τα κιλά χαρτόμαζας**

$$\psi = 0,7\chi$$

α)  $\psi = 0,7 \cdot 500, \quad \psi = 350$  κιλά χαρτόμαζας

.....γ)  $250 = 0,7\chi \quad \chi = 250/0,7 \quad \chi = 357$  κιλά χαρτιού

### ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τη μεταβλητή  $x$  με την μεταβλητή  $y$ .

A) Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιάς ( $x$ ) παράγει 0,2 κιλά λάδι ( $y$ ).

$$y = 0,2x$$

B) Ένα κατάστημα ανακοινώνει αύξηση στις τιμές των προϊόντων κατά 5 € στο καθένα. Η σχέση που συνδέει τις παλιές τιμές ( $x$ ) με τις νέες τιμές ( $y$ ) είναι:

$$y = x + 5$$

Γ) Στην αρχική τιμή ( $x$ ) ενός προϊόντος επιβάλλεται Φ.Π.Α 23% ώστε να προκύψει η τελική τιμή ( $y$ ).

$$y = x + 23\%x, \quad y = x + 23/100x, \quad y = x + 0,23x, \quad y = (1 + 0,23)x, \quad y = 1,23x$$

Δ) Στον λογαριασμό του κινητού τηλεφώνου πληρώνουμε **πάγιο** 10 € και 0,05 € ανά λεπτό ομιλίας. Η σχέση που συνδέει τα λεπτά ομιλίας ( $x$ ) με το τελικό ποσό του λογαριασμού ( $y$ ) είναι:

$$y = 10 + 0,05x$$

### ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΤΙΜΩΝ

Για κάθε συνάρτηση που δίνεται, να συμπληρώσετε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών.

A)  $y = 4x + 3$

|     |    |    |    |   |   |
|-----|----|----|----|---|---|
| $x$ | -3 | -2 |    | 1 | 3 |
| $y$ |    | -5 | -1 | 7 |   |

$$\psi = 4 \cdot (-2) + 3 = -8 + 3 = -5$$

$$7 = 4x + 3,$$

$$7 - 3 = 4x,$$

$$4 = 4x, \quad 4/4 = 4x/4, \quad x = 1$$

B)  $y = 7 - 2x$

|     |    |   |   |   |    |
|-----|----|---|---|---|----|
| $x$ | -1 | 0 |   | 3 | 5  |
| $y$ | 9  |   | 5 | 1 | -3 |

$$\psi = 7 - 2(3) = 7 - 6 = 1$$

$$-3 = 7 - 2x,$$

$$2x = 7 + 3, \quad 2x = 10, \quad 2x/2 = 10/2, \quad x = 5$$

Γ)  $y = 3x^2$

|     |    |    |    |    |   |
|-----|----|----|----|----|---|
| $x$ | -2 | -1 | 5  | -5 | 2 |
| $y$ | 12 |    | 75 | 75 |   |

$$\psi = 3(-2)^2, \quad \psi = 3(+4), \quad \psi = 12$$

$$75 = 3x^2,$$

$$75/3 = 3x^2/3,$$

$$25 = x^2, \quad x = 5 \text{ ή } x = -5$$

Δ)  $y = x^2 + 2x - 3$

|     |    |    |   |   |   |
|-----|----|----|---|---|---|
| $x$ | -3 | -1 | 0 | 2 | 4 |
| $y$ |    |    |   |   |   |

E)  $y = \sqrt{x}$

|     |   |   |   |    |    |
|-----|---|---|---|----|----|
| $x$ | 0 | 1 | 9 | 16 | 36 |
| $y$ | 0 | 1 | 3 | 4  | 6  |