

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

1

Θέμα 1:

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 (ένα προς ένα), όταν για οποιαδήποτε $\chi_1, \chi_2 \in A$, ισχύει: αν $\chi_1 \neq \chi_2$ τότε $f(\chi_1) \neq f(\chi_2)$.

2) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = -\infty$

3) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Αν για τη πρώτη παράγωγο της f ισχύει: $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο χ του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

4) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Τότε ισχύει ότι:

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

5) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

(μον. 25)

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 3x + 2$, $x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

iii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) + 2023 = 0$ έχει θετική λύση.

(Μονάδες 6)

Θέμα 3:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$

(μον. 10, 15)

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} f(x)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2 \cdot \ln x \cdot f(x) + x e^x}{x(f(x) + e^x)} dx$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1

A. Να χαρακτηριστεί τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν η f συνεχής στο $[α,β]$ τότε έχει ελάχιστο
2. Αν $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις
3. Αν f αντιστρέψιμη, τότε ισχύει ότι $f^{-1}(f(x))=x, x \in D_f$.
4. Αν $f'(x_0) = 0$, τότε x_0 είναι πάντα θέση ακρότατο της f
5. Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη

(Μονάδες 10)

B. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, x < 0$.

A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
(Μονάδες 5)

B. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 8)

Γ.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f , την f^{-1} .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax - 2$ με $a \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι για κάθε $a \neq 1$ η εξίσωση $x^3 + 2x^2 = ax + 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$

(Μονάδες 12)

B. Αν $a = 1$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x+2}$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f^2(x) - 5 = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(2) = 3$

A. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

B. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - \sin x$, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
(Μονάδες 7)
- ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + \sin x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 15)

β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

1. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι « 1 - 1 » και το $M(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε το σημείο $\Lambda(\beta, \alpha)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f^{-1} .

2. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

4. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$$

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=3$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2 \ln x - x$.

α)

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1

A. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 ; (7M)

B. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι : Αν F είναι μια

παράγουσα της f στο Δ , τότε

όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ (8M)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α) Αν η f συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$

γ) Αν $f(x) > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ κοντά στο x_0

δ) Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m

ε) Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη (10M)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0, 5]$

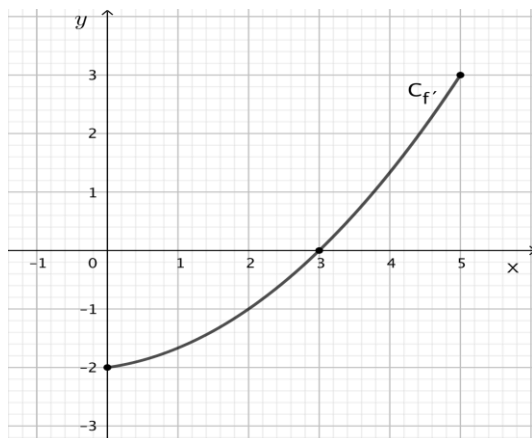
α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$; (6M)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, 5]$ (10M)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_0 = 3$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(9M)



ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)\ln x$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

(5M)

β) Να αποδείξετε ότι $f(2017) < \frac{f(2018) + f(2016)}{2}$

(6M)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{3}x \ln x - \frac{2}{3} = \ln x - \frac{2}{3}x$

(6M)

δ) Να βρείτε αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

(5M)

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=3$

(3M)

ΘΕΜΑ 4

Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου)

ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση

$$T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt} \text{ όπου:}$$

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot \ln(T(t)) dt$ ισούται με

$$\frac{2e^3 - 3e^4}{k} \text{ αν είναι } T(0) = e^4 \text{ και } T(1) = e^3.$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση είναι '1-1' στο πεδίο ορισμού της τότε είναι και γνησίως μονότονη σε αυτό.

β) Αν f, g συναρτήσεις τότε ισχύει πάντα $f \circ g = g \circ f$.

γ) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

δ) Αν f συνεχής στο Δ και $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

ε) Η εξίσωση $\chi^5 - 2\chi^4 + 3\chi - 1 = 0$ είναι αδύνατη.

Μονάδες 10

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στην παράγωγο της κάθε συνάρτησης στο χ_0 .

Στήλη A - Συναρτήσεις	Στήλη B - Παράγωγος
α. $f(x) = x^3, \quad x_0 = -1$	I. -2
β. $f(x) = \eta\mu 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$	II. 3
γ. $f(x) = 3 x , \quad x_0 = 0$	III. $\frac{1}{4}$
δ. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4$	IV. 0
	V. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ με f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Μονάδες 7**ΘΕΜΑ B**

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε:

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{και} \quad g(x) = 2\ln x.$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$.

(Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f + g$ ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 9)**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + 1$ με πραγματικούς α, β η οποία παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία -1 και 3.

1. Να δείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = -9$.

Μονάδες 10

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της.

Μονάδες 8

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(-1, 3)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$.

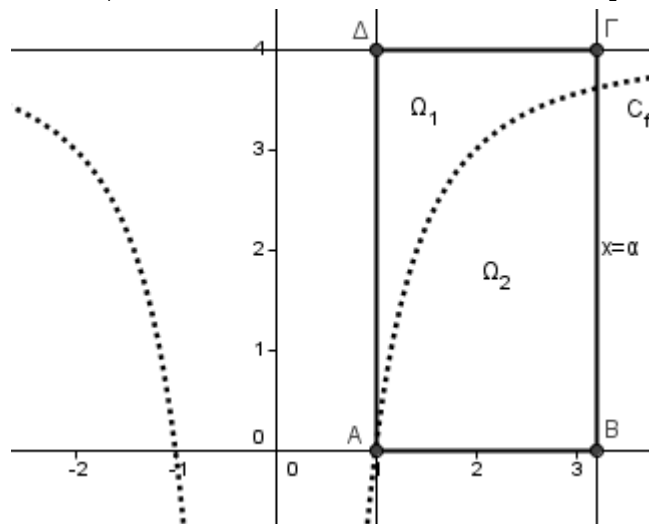
α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f .

(Μονάδες 9)

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$.

(Μονάδες 6)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ που ορίζεται από τον άξονα x' και τις ευθείες $x=1$, $x=\alpha$, $\alpha > 1$ και $y=4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2 .



- i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α , τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων.

(Μονάδες 5)

- ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$.

(Μονάδες 5)

6

ΘΕΜΑ 1°

A) Να αποδείξετε ότι αν $f(x) = \sqrt{x}$ τότε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

Μονάδες 08

B) Πότε το σημείο $A(X_0, f(X_0))$ λέγεται σημείο καμπής μίας συνάρτησης f ;

Μονάδες 09

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathcal{R}$ έχει μία θέση ολικού μέγιστου
2. Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathcal{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:
Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
3. Αν $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$ τότε θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$
4. Αν είναι $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

Μονάδες 08

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 05

B) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 08

Γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”.

Μονάδες 05

Δ) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f , την f^{-1} .

Μονάδες 07

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{4}{3}x^3$

1. Να μελετηθεί ως προς την Μονοτονία, Ακρότατα και Σημεία καμπής, εφόσον υπάρχουν
2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
3. Να δείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της

Μονάδες 15

Μονάδες 05

Μονάδες 05

ΘΕΜΑ 4°

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, & -1 \leq x < 1 \\ 1 + \frac{(\ln x)^2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

Μονάδες 7

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$.

