



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΟ 1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ1 Μονώνυμα - Πολυώνυμα

Λέμε **αλγεβρική παράσταση** κάθε παράσταση που περιέχει μεταβλητές .

π.χ. $-2\alpha\beta$, $x^2 + y^2$, $-\sqrt{3}x + 5y$, $(x + y)^2$, $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

Λέμε **αριθμητική τιμή** (ή απλά **τιμή**) μιας αλγεβρικής παράστασης τον αριθμό που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με συγκεκριμένους αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις που σημειώνονται .

Παράδειγμα:

$$A = x^2 + y^2$$

Η αριθμητική τιμή της παράστασης A για $x = -1$ και $y = 2$ είναι :

$$A = (-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

Παρατήρηση:

Προφανώς, αν στην ίδια αριθμητική παράσταση βάλουμε διαφορετικές τιμές παίρνουμε διαφορετική αριθμητική τιμή .

Λέμε **μονώνυμο** κάθε αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού .

π.χ. $4x^2y$, $-\frac{2}{3}\alpha\beta^2$, x^2y^2 , $-\sqrt{3}xy$.

Επίσης κάθε αριθμός είναι μονώνυμο γιατί μπορούμε να γράψουμε :

π.χ. $-2 = -2 \cdot x^0 = -2 \cdot x^0 \cdot y^0$ κ.ο.κ.

Κάθε μονώνυμο αποτελείται από δύο τμήματα :

- Τον αριθμητικό παράγοντα (που συνήθως γράφεται πρώτος) και λέγεται **συντελεστής** του μονώνυμου και
- Το γινόμενο των μεταβλητών που λέγεται **κύριο μέρος** του μονώνυμου .

Παράδειγμα:

$$\alpha) \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{συντελεστής}} \cdot \underbrace{\alpha^2 \beta}_{\text{κύριο μέρος}}$$

$$\beta) x \cdot y = \underbrace{1}_{\text{συντελεστής}} \cdot \underbrace{xy}_{\text{κύριο μέρος}}$$

$$\gamma) \underbrace{-2\sqrt{3}}_{\text{συντελεστής}} \cdot \underbrace{x^2 y^3 z^7}_{\text{κύριο μέρος}}$$

Δύο ή περισσότερα μονώνυμα λέγονται **όμοια** αν έχουν το ίδιο κύριο μέρος .

Παράδειγμα:

$$x^2y, -2x^2y, -\frac{1}{2}x^2y, -\sqrt{3}x^2y.$$

Παρατήρηση:

Όταν ο συντελεστής του μονώνυμου είναι το 1 ή το -1 γράφουμε:

$$\text{π.χ. } 1 \cdot x^2y = x^2y, \quad -1 \cdot xy = -xy$$

Άθροισμα μονωνύμων

Το **άθροισμα** ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει **συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους** .

Παράδειγμα:

$$\alpha) -2x^2y + 5x^2y = (-2 + 5)x^2y = 3x^2y$$

$$\beta) 3\alpha\beta - 2\alpha\beta - 4\alpha\beta = (3 - 2 - 4)\alpha\beta = -3\alpha\beta$$

$$\gamma) -\frac{1}{2}x^2 + x^2 = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)x^2 = \frac{1}{2}x^2$$

Σημείωση:

Χρησιμοποιήσαμε την επιμεριστική ιδιότητα $a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$ αλλά αντίστροφα .

Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

Το **γινόμενο** μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει ως **συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους** και ως **κύριο μέρος όλες τις μεταβλητές με εκθέτη σε καθεμιά ίσο με το άθροισμα των εκθετών τους** .

Παράδειγμα:

$$\alpha) (-2x^2y)(5xy^2) = (-2)x^2y \cdot 5xy^2 = (-2) \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x \cdot y^2 \cdot y = -10 \cdot x^{2+1} \cdot y^{1+2} = -10x^3y^3$$

$$\beta) \left(-\frac{1}{3}ax^2\right)(3ax) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 \cdot a^{1+1} \cdot x^{2+1} = -1 \cdot a^2 \cdot x^3 = -a^2x^3.$$

$$\gamma) (2x^2yz)(-xy) = 2(-1) \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z = 2(-1) \cdot x^{2+1} \cdot y^{1+1} \cdot z = -2x^3y^2z.$$

$$\delta) (-x^2 \cdot y^2) \cdot (xzw) = -x^3y^2zw.$$

Σημείωση:

Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα των δυνάμεων $a^v \cdot a^u = a^{v+u}$.

Πηλίκο μονωνύμων

Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή με τον αντίστροφο του παρανομαστή.

Παράδειγμα:

$$\alpha) (-16x^3y^2) : (-2xy) = -16x^3y^2 \cdot \frac{1}{-2xy} = \frac{-16x^3y^2}{-2xy} = 8x^{3-1} \cdot y^{2-1} = 8x^2y.$$

$$\beta) (2xy^2) : (ax) = \frac{2xy^2}{ax} = \frac{2y^2}{a}.$$

Σημείωση:

- 1) Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα των δυνάμεων $a^v : a^u = a^{v-u}$
- 2) Όπως φαίνεται από το β) το **πηλίκο μονωνύμων δεν είναι πάντα μονώνυμο**.

Πολυώνυμα

Λέμε **πολυώνυμο** κάθε άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

Κάθε ένα από τα μονώνυμα αυτά λέγεται **όρος** του πολωνύμου.

Συνήθως τα πολυώνυμα συμβολίζονται με P(x), Q(x), F(x) κ.λ.π.

Παράδειγμα:

$$\alpha) -2x^2 - 5x + 1$$

$$\beta) 2ax + 2by$$

$$\gamma) -x^2y + x^2y^2 - xy^2$$

$$\delta) -2x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 10x - 1$$

Παρατήρηση:

Συνήθως όταν έχουμε πολυώνυμο μιας μεταβλητής π.χ. x « **τα διατάσσουμε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x** » δηλαδή αλλάζουμε την σειρά των όρων τους έτσι ώστε πηγαίνοντας από τα αριστερά προς τα δεξιά οι δυνάμεις του x να μικραίνουν.

Αυτό φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα:

Να διατάξατε το πολυώνυμο $-2x^2 + 5x - 8x^4 + 1 + 3x^3$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη δύναμη του x είναι το x^4 . Γράφουμε πρώτα τον όρο που περιέχει το x^4 δηλαδή τον $-8x^4$, μετά τον όρο που περιέχει το x^3 , δηλαδή τον $3x^3$ κ.ο.κ. Έτσι έχουμε:
 $-8x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x + 1$

Σημείωση:

Αν λείπει κάποιος όρος βάζουμε το 0.

π.χ. $-x^3 + 2x^5 + x - 2 = 2x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 + x - 2$



Τι πρέπει να προσέχουμε πάρα πολύ

1) Υπάρχουν αλγεβρικές παραστάσεις που δεν έχουν αριθμητική τιμή για όλες τις τιμές των μεταβλητών .

π.χ. η παράσταση $A = \frac{x^2 + y^2}{x - 1}$ δεν έχει αριθμητική τιμή για $x = 1$ γιατί τότε ο παρανομαστής γίνεται 0 .

2) Όταν έχουμε πράξεις μεταξύ αλγεβρικών παραστάσεων πρέπει να χρησιμοποιούμε παρενθέσεις .

π.χ. $A = x^2 - y^2$
 $B = x^2 - 2xy + y^2$
 $A - B = (x^2 - y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) = \cancel{x^2} - y^2 - \cancel{x^2} + 2xy - y^2 = 2xy - 2y^2$

2 Αναγωγή ομοίων όρων

Λέμε **αναγωγή ομοίων όρων** σε μία αλγεβρική παράσταση την αντικατάσταση των ομοίων όρων που υπάρχουν στην παράσταση με το άθροισμα τους.

Αυτό γίνεται, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα :

Παράδειγμα 1:

Να γίνουν οι αναγωγές των ομοίων όρων.

α) $-2 + 7x^2 - 5x^2 + 13 - 12x^2$

β) $\alpha^2\beta - 3\alpha\beta + \beta^2 + 3\alpha\beta + 2\beta^2 - 5\alpha^2\beta$

γ) $x^3 - 3x^2y + yx^2 - 2yz^2 + z^3$

δ) $3\alpha - \beta + 4\alpha + 5\beta$

ε) $3\omega + 2\phi + \zeta - 3\omega - \phi$

στ) $\rho^2 + 3\rho - 4\rho^2 - 5$

ζ) $\frac{1}{3}t - \frac{1}{6}t^2 - t + t^2$

Λύση :

Για να κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα :

Βήμα 1: Αλλάζουμε την σειρά των όρων έτσι ώστε οι όμοιοι όροι να είναι ο ένας δίπλα στον άλλο.

Βήμα 2: Βάζουμε σε μία παρένθεση τους συντελεστές καθενός από τους όμοιους όρους .

Βήμα 3: Βρίσκουμε τα αθροίσματα μέσα στις παρενθέσεις.

$$\begin{aligned}\alpha) & -2 + 7x^2 - 5x^2 + 13 - 12x^2 = \\ & = 7x^2 - 12x^2 - 5x^2 + 13 - 2 = \\ & = (7 - 5 - 12)x^2 + (-2 + 13) = \\ & = -10x^2 + 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) & \alpha^2\beta - 3\alpha\beta + \beta^2 + 3\alpha\beta + 2\beta^2 - 5\alpha^2\beta = \\ & = \alpha^2\beta - 5\alpha^2\beta - 3\alpha\beta + 3\alpha\beta + \beta^2 + 2\beta^2 = \\ & = (1 - 5)\alpha^2\beta + (-3 + 3)\beta + (1 + 2)\beta^2 = \\ & = -4\alpha^2\beta + 0 + 3\beta^2 = \\ & = -4\alpha^2\beta + 3\beta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma) & x^3 - 3x^2y + yx^2 - 2yz^2 + z^3 = \\ & = x^3 - 3x^2y + x^2y - 2yz^2 + z^3 = \\ & = (-3 + 1)x^2y + x^3 - 2yz^2 + z^3 = \\ & = -2x^2y + x^3 - 2yz^2 + z^3\end{aligned}$$

$$\delta) 3\alpha - \beta + 4\alpha + 5\beta = 7\alpha + 4\beta$$

$$\epsilon) 3\omega + 2\phi + \zeta - 3\omega - \phi = \phi + \zeta$$

$$\sigma\tau) \rho^2 + 3\rho - 4\rho^2 - 5 = -3\rho^2 + 3\rho - 5$$

$$\zeta) \frac{1}{3}t - \frac{1}{6}t^2 - t + t^2 = \left(\frac{1}{3} - 1\right)t + \left(-\frac{1}{6} + 1\right)t^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)t + \frac{5}{6}t^2 = \frac{5}{6}t^2 - \frac{2}{3}t$$

Παράδειγμα 2 :

Να απαλείψετε τις παρενθέσεις (αγκύλες, άγκιστρα) και να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων :

$$\begin{aligned}\alpha) & (2x^2 + 5) - (x + 3x^2 - 6) - x - (x^2 + x) \\ \beta) & - [- (-3 + x^2y + xy^2) - x^3] + y^3 - 3 \\ \gamma) & x^3 - \{ -y^3 - (5 + z^2) - [- (xyz + 5)] \} \\ \delta) & -3x^3 + 2 - [-2x + 3x^2 - (x^3 + 2x^2 - 5x) - 6 + x]\end{aligned}$$

Λύση:

Βγάζουμε πρώτα τις παρενθέσεις, μετά τις αγκύλες και τέλος τα άγκιστρα.

$$\begin{aligned}\alpha) & (2x^2 + 5) - (x + 3x^2 - 6) - x - (x^2 + x) = \\ & = 2x^2 + 5 - x - 3x^2 + 6 - x - x^2 - x = -2x^2 - 3x + 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) & - [- (-3 + x^2y + xy^2) - x^3] + y^3 - 3 = \\ & = - (+ 3 - x^2y - xy^2) - x^3 + y^3 - 3 =\end{aligned}$$

$$= -3 + x^2y + xy^2 + x^3 + y^3 - 3 =$$

$$= x^2y + xy^2 + x^3 + y^3 - 6$$

$$\gamma) x^3 - \{ -y^3 - (5 + z^2) - [- (xyz + 5)] \} =$$

$$= x^3 - [-y^3 - (5 + z^2) + (xyz + 5)] =$$

$$= x^3 - (-y^3 - 5 - z^2 + xyz + 5) =$$

$$= x^3 - (-y^3 - 5 - z^2 + xyz + 5) =$$

$$= x^3 + y^3 + z^2 - xyz$$

$$\delta) -3x^3 + 2 - [-2x + 3x^2 - (x^3 + 2x^2 - 5x) - 6 + x] =$$

$$= -3x^3 + 2 - (-2x + 3x^2 - x^3 - 2x^2 + 5x - 6 + x) =$$

$$= -3x^3 + 2 + 2x - 3x^2 + x^3 + 2x^2 - 5x + 6 - x =$$

$$= -3x^3 + 2 + 2x - 3x^2 + x^3 + 2x^2 - 5x + 6 - x =$$

$$= -2x^3 - x^2 - 4x + 8$$

3 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Γινόμενο μονώνυμου με πολώνυμο

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα μονώνυμο με ένα πολώνυμο:

Πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Δηλαδή,
$$a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$$

Όταν πολλαπλασιάζουμε μονώνυμο επί πολώνυμο ή πολώνυμο επί πολώνυμο λέμε ότι **αναπτύσσουμε** το γινόμενο και το αποτέλεσμα λέγεται **ανάπτυγμά** του γινομένου.

Παράδειγμα 1:

Να γίνουν οι πράξεις:

α) $2x(3x^2 - 4x + 2)$

β) $-4x^3y(2x^2y - 3xy + 1)$

Λύση:

α) $2x(3x^2 - 4x + 2) = (-2x)(3x^2) + (-2x)(-4x) + (-2x)2 = -6x^3 + 8x^2 - 4x$

β) $-4x^3y(2x^2y - 3xy + 1) = (-4x^3y)(2x^2y) + (-4x^3y)(-3xy) + (-4x^3y)5 =$
 $-8x^5y^2 + 12x^4y^2 - 20x^3y$

Παράδειγμα 2:

Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

α) $2xy(3x - y^2) - 4xy^3$

β) $2x^3y(x^2y + y^2x)$

Λύση:

α) $2xy(3x - y^2) - 4xy^3 = 6x^2y - 2xy^3 - 4xy^3 = 6x^2y - 6xy^3$

$$\beta) 2x^3y (x^2y + y^2x) = 2x^5y^2 + 2x^4y^3$$

Γινόμενο Πολυωνύμων

Για να πολλαπλασιάσουμε δυο πολυώνυμα:

Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

$$\text{Δηλαδή,} \quad (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha(\gamma + \delta) + \beta(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

Παράδειγμα:

Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) (2x - 3y)(3x^2y + 2xy^2 - x^3)$$

$$\beta) (2x^3 - y^2 + 3x + 5)(x^2 - 3x + 1)$$

Λύση:

$$\begin{aligned} \alpha) (2x - 3y)(3x^2y + 2xy^2 - x^3) &= \\ &= 2x(3x^2y + 2xy^2 - x^3) - 3y(3x^2 + 2xy^2 - x^3) = \\ &= 6x^3y + 4x^2y^2 - 2x^4 - 9x^2y^2 - 6xy^3 + 3x^3y = \\ &= 9x^3y - 5x^2y^2 - 6xy^3 - 2x^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) (2x^3 - x^2 + 3x + 5)(x^2 - 3x + 1) &= \\ &= 2x^3(x^2 - 3x + 1) - x^2(x^2 - 3x + 1) + 3x(x^2 - 3x + 1) + 5(x^2 - 3x + 1) = \\ &= 2x^5 - 6x^4 + 2x^3 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x^3 - 9x^2 + 3x + 5x^2 - 15x + 5 = \\ &= 2x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 12x + 5 \end{aligned}$$



Τι πρέπει να προσέχουμε πάρα πολύ



Όταν έχουμε να πολλαπλασιάσουμε τρία ή περισσότερα πολυώνυμα πολλαπλασιάζουμε τα δύο και στη συνέχεια ότι βρούμε με το τρίτο.

Αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} (x^2 + 2)(2x + 3)(x - 1) &= \\ &= (2x^3 + 4x + 3x^2 + 6)(x - 1) = \\ &= 2x^4 + 4x^2 + 3x^3 + 6x - 2x^3 - 4x - 3x^2 - 6 = \\ &= 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 6 \end{aligned}$$

4 Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

Λέμε **ταυτότητα** κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών.

Οι σημαντικότερες ταυτότητες και οι αποδείξεις τους αναφέρονται παρακάτω:

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ *Τετράγωνο αθροίσματος*

Απόδειξη:

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha \cdot (\alpha + \beta) + \beta \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ *Τετράγωνο διαφοράς*

Απόδειξη:

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha \cdot (\alpha - \beta) - \beta \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

3. $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ *Αθροισμα επί Διαφορά ή Διαφορά τετραγώνων*

Απόδειξη:

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha \cdot (\alpha - \beta) + \beta \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

4. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ *Κύβος αθροίσματος*

Απόδειξη:

$$(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \alpha \cdot (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + \beta \cdot (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

5. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ *Κύβος διαφοράς*

Απόδειξη:

$$(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \alpha \cdot (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) - \beta \cdot (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

6. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ *Αθροισμα κύβων*

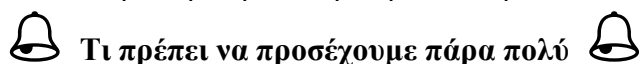
Απόδειξη:

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) + \beta \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3$$

7. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ *Διαφορά κύβων*

Απόδειξη:

$$(\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - \beta \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \\ = \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3$$



1) Οι ταυτότητες που είδαμε παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση που αντί για τα γράμματα α και β έχουμε παραστάσεις.

$$\text{π.χ. } (2x + \alpha)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \alpha + \alpha^2 = 4x^2 + 4\alpha x + \alpha^2$$

2) Δεν πρέπει να συγχέουμε τις ταυτότητες 4 και 5 με τις ταυτότητες 6 και 7.

Παράδειγμα 1:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha) (x + 5)^2$$

$$\beta) (2t - 3)^2$$

$$\gamma) (2xy + 3xz)^2$$

$$\delta) \left(\alpha + \frac{3}{\beta} \right)^2$$

Λύση:

$$\alpha) (x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$\beta) (2t + 3)^2 = (2t)^2 + 2 \cdot 2t \cdot 3 + 3^2 = 4t^2 + 12t + 9$$

$$\gamma) (2xy + 3xz)^2 = (2xy)^2 + 2 \cdot 2xy \cdot 3xz + (3xz)^2 = 4x^2y^2 + 12x^2yz + 9x^2z^2$$

$$\delta) \left(\alpha + \frac{3}{\beta} \right)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{3}{\beta} + \left(\frac{3}{\beta} \right)^2 = \alpha^2 + \frac{6\alpha}{\beta} + \frac{9}{\beta^2}$$

Παράδειγμα 2:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha) (p - 2)^2$$

$$\beta) (\xi - 3t)^2$$

$$\gamma) (2xy^2 - x^2y)^2$$

$$\delta) \left(\alpha - \frac{1}{\beta} \right)^2$$

Λύση:

$$\alpha) (p - 2)^2 = p^2 - 2 \cdot p \cdot 2 + 2^2 = p^2 - 4p + 4$$

$$\beta) (\xi - 3t)^2 = \xi^2 - 2 \cdot \xi \cdot 3t + (3t)^2 = \xi^2 - 6\xi t + 9t^2$$

$$\gamma) (2xy^2 - x^2y)^2 = (2xy^2)^2 - 2 \cdot 2xy^2 \cdot x^2y + (x^2y)^2 = 4x^2y^4 - 4x^3y^3 + x^4y^2$$

$$\delta) \left(\alpha - \frac{1}{\beta} \right)^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}$$

Παράδειγμα 3:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha) (3p - 2) \cdot (3p + 2)$$

$$\beta) (x - 3) \cdot (x + 3)$$

$$\gamma) (4xy^2 + 3x^2y) \cdot (4xy^2 - 3x^2y)$$

$$\delta) \left(2\alpha - \frac{3}{\beta}\right) \cdot \left(2\alpha + \frac{3}{\beta}\right)$$

Λύση:

$$\alpha) (3p - 2) \cdot (3p + 2) = (3p)^2 - 2^2 = 9p^2 - 4$$

$$\beta) (x - 3) \cdot (x + 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

$$\gamma) (4xy^2 + 3x^2y) \cdot (4xy^2 - 3x^2y) = (4xy^2)^2 - (3x^2y)^2 = 16x^2y^4 - 9x^4y^2$$

$$\delta) \left(2\alpha - \frac{3}{\beta}\right) \cdot \left(2\alpha + \frac{3}{\beta}\right) = (2\alpha)^2 - \left(\frac{3}{\beta}\right)^2 = 4\alpha^2 - \frac{9}{\beta^2}$$

Παράδειγμα 4:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha) (3\kappa + 2)^3$$

$$\beta) (2\beta + 1)^3$$

$$\gamma) (xy + x^2y)^3$$

$$\delta) \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)^3$$

Λύση:

$$\alpha) (3\kappa + 2)^3 = (3\kappa)^3 + 3 \cdot (3\kappa)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3\kappa \cdot 2^2 + 2^3 = 27\kappa^3 + 54\kappa^2 + 36\kappa + 8$$

$$\beta) (2\beta + 1)^3 = (2\beta)^3 + 3 \cdot (2\beta)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2\beta \cdot 1^2 + 1^3 = 8\beta^3 + 12\beta^2 + 6\beta + 1$$

$$\gamma) (xy + x^2y)^3 = (xy)^3 + 3 \cdot (xy)^2 \cdot x^2y + 3 \cdot xy \cdot (x^2y)^2 + (x^2y)^3 = x^3y^3 + 3x^4y^3 + 3x^5y^3 + x^6y^3$$

$$\delta) \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)^3 = \alpha^3 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot \frac{1}{\beta} + 3 \cdot \alpha \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^3 = \alpha^3 + 3\frac{\alpha^2}{\beta} + 3\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3}$$

Παράδειγμα 5:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha) (x - 1)^3$$

$$\beta) (2y - 3)^3$$

$$\gamma) (2xy - x^2y)^3$$

$$\delta) \left(\frac{2}{3}k - \frac{1}{2}p\right)^3$$

Λύση:

$$\alpha) (x - 1)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\beta) (2y - 3)^3 = (2y)^3 - 3 \cdot (2y)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2y \cdot 3^2 - 3^3 = 8y^3 - 36y^2 + 54y - 27$$

$$\gamma) (2xy - x^2y)^3 = (2xy)^3 - 3 \cdot (2xy)^2 \cdot x^2y + 3 \cdot 2xy \cdot (x^2y)^2 - (x^2y)^3 = 8x^3y^3 - 12x^4y^3 + 6x^5y^3 - x^6y^3$$

$$\delta) \left(\frac{2}{3}k - \frac{1}{2}p\right)^3 = \left(\frac{2}{3}k\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}k\right)^2 \cdot \frac{1}{2}p + 3 \cdot \frac{2}{3}k \cdot \left(\frac{1}{2}p\right)^2 - \left(\frac{1}{2}p\right)^3 = \frac{8k^3}{27} - 3 \cdot \frac{4k^2}{9} \cdot \frac{p}{2} + 3 \cdot \frac{2k}{3} \cdot \frac{p^2}{4} - \frac{p^3}{8} = \frac{8k^3}{27} - \frac{2k^2p}{3} + \frac{p^2k}{2} - \frac{p^3}{8}$$

Γενικά για να αποδείξουμε μια ταυτότητα χρησιμοποιούμε έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1^{ος} τρόπος: Ξεκινάμε από το 1^ο μέλος, κάνουμε πράξεις και καταλήγουμε στο 2^ο.

Παράδειγμα:

Να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

Απόδειξη:

Ξεκινάμε από το 1^ο μέλος και έχουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \\&= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta\end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος: Ξεκινάμε από το 2^ο μέλος, κάνουμε πράξεις και καταλήγουμε στο 1^ο.

Παράδειγμα:

Να αποδείξετε ότι: $4\kappa^2 - 4\kappa = 4(\kappa + 1)(\kappa - 1)$

Απόδειξη:

Ξεκινάμε από το 2^ο μέλος και έχουμε:

$$4(\kappa + 1)(\kappa - 1) = 4(\kappa^2 - 1^2) = 4(\kappa^2 - 1) = 4\kappa^2 - 4\kappa$$

3^{ος} τρόπος: Δείχνουμε ότι και τα δύο μέλη της ισότητας είναι ίσα με την ίδια παράσταση.

Παράδειγμα:

Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) - (\alpha x + \beta y)^2 = (\alpha y - \beta x)^2$

Απόδειξη:

Παίρνουμε το 1^ο μέλος και κάνουμε πράξεις:

$$\begin{aligned}(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) - (\alpha x + \beta y)^2 &= \\&= \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 - (\alpha^2 x^2 + 2\alpha x \beta y + \beta^2 y^2) = \\&= \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 - \alpha^2 x^2 - 2\alpha x \beta y - \beta^2 y^2 = \\&= \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 - 2\alpha x \beta y\end{aligned}$$

Παίρνουμε το 2^ο μέλος και κάνουμε πράξεις:

$$(\alpha y - \beta x)^2 = \alpha^2 y^2 - 2\alpha x \beta y + \beta^2 x^2 = \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 - 2\alpha x \beta y$$

Άρα δείξαμε ότι και τα δύο μέλη είναι ίσα με την ίδια παράσταση.

Παρατήρηση:

Συνήθως για να αποδείξουμε μια ταυτότητα ξεκινάμε από το μέλος που έχει τις περισσότερες πράξεις να κάνουμε, δηλαδή να αναπτύξουμε ταυτότητες, να κάνουμε αναγωγές ομοίων όρων κ.λ.π.

5 Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων

Πολλές φορές είναι χρήσιμο τις αλγεβρικές παραστάσεις να τις έχουμε σε γινόμενο παραγόντων.

Η διαδικασία που ακολουθούμε για να μετατρέψουμε μια παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο λέγεται **παραγοντοποίηση**.

Θα δούμε τις παρακάτω σημαντικότερες περιπτώσεις παραγοντοποίησης.

1η Περίπτωση: Κοινός Παράγοντας.

Όταν όλοι οι όροι ενός πολυωνύμου έχουν ένα κοινό παράγοντα (αριθμό ή μεταβλητή ή και τα δυο) τότε για να το κάνουμε γινόμενο χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα.

Παράδειγμα:

Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α) $2x - 4$

β) $3x^2 - x^2y$

γ) $2x^2y - 2xy^2$

δ) $2x^2 + 2x + 2$

ε) $x(a-1) + y(a-1)$

στ) $(a+3)(b-5) - (a^2+1)(5-b)$

Λύση:

α) Ο κοινός παράγοντας είναι το 2 άρα

$$2x - 4 = 2(x - 2)$$

β) Ο κοινός παράγοντας είναι το x^2 , άρα

$$3x^2 - x^2y = x^2(3 - y)$$

γ) Ο κοινός παράγοντας είναι το $2xy$, άρα

$$2x^2y - 2xy^2 = 2xy(x - y)$$

δ) Ο κοινός παράγοντας είναι το 2, άρα

$$2x^2 + 2x + 2 = 2(x^2 + x + 1)$$

ε) Ο κοινός παράγοντας είναι όλη η παράσταση $a - 1$, άρα

$$x(a-1) + y(a-1) = (a-1)(x+y)$$

στ) Αρχικά δεν φαίνεται να υπάρχει κοινός παράγοντας όμως αν αλλάξουμε το πρόσημο του δεύτερου όρου μπορούμε να αλλάξουμε το $5 - b$ σε $b - 5$, άρα

$$(a+3)(b-5) - (a^2+1)(5-b) = (a+3)(b-5) + (a^2+1)(b-5)$$

Τώρα έχουμε κοινό παράγοντα το $b - 5$ άρα

$$(b-5)(a+3+a^2+1) = (b-5)(a^2+a+4)$$

2η Περίπτωση: Ομαδοποίηση

Όταν σε ένα πολυώνυμο δεν υπάρχει κοινός παράγοντας για όλους τους όρους, μπορεί χωρίζοντας τους όρους του σε ομάδες να δημιουργήσουμε κοινό παράγοντα.

Παράδειγμα:

Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α) $ax + ay + bx + by$

β) $2x - yx + 2 - y$

γ) $αγ + βγ + α + β$

δ) $3x^3 - 2y^3 - 6x^2y^2 + xy$

ε) $ax^2 + ay^2 - bx^2 - by^2 + β - α$

στ) $21x^2y - 4y - 12x + 7xy^2$

Λύση:

α) $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

β) $2x - yx + 2 - y = x(2 - y) + (2 - y) = (2 - y)(x + 1)$

γ) $αγ + βγ + α + β = αγ + α + βγ + β = α(γ + 1) + β(γ + 1) = (γ + 1)(α + β)$

δ) $3x^3 - 2y^3 - 6x^2y^2 + xy =$
 $= 3x^3 - 6x^2y^2 + xy - 2y^3 =$
 $= 3x^2(x - 2y^2) + y(x - 2y^2) =$
 $= (x - 2y)(3x^2 + y)$

ε) $ax^2 + ay^2 - bx^2 - by^2 + β - α =$
 $= ax^2 + ay^2 - α - βx^2 - βy^2 + β =$
 $= α(x^2 + y^2 - 1) - β(x^2 + y^2 - 1) = (x^2 + y^2 - 1)(α - β)$

στ) $21x^2y - 4y - 12x + 7xy^2 =$
 $= 21x^2y + 7xy^2 - 4y - 12x =$
 $= 7xy(3x + y) - 4(y + 3x) =$
 $= 7xy(3x + y) - 4(3x + y) =$
 $= (3x + y)(7xy - 4)$

3η Περίπτωση: Διαφορά τετραγώνων

Όπως είδαμε στις ταυτότητες, η ταυτότητα $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ μετατρέπει ένα πολυώνυμο που είναι διαφορά τετραγώνων σε γινόμενο.

Παράδειγμα:

Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α) $x^2 - 9$

β) $4x^2 - 1$

γ) $(2x - 1)^2 - 36$

δ) $4 - (1 + 4x)^2$

ε) $(x + y)^2 - (x - y)^2$

$$\sigma\tau) 4\alpha^2 - 36\beta^2$$

Λύση:

$$\alpha) x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$$

$$\beta) 4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x + 1)(2x - 1)$$

$$\gamma) (2x - 1)^2 - 36 = (2x - 1)^2 - 6^2 = (2x - 1 + 6)(2x - 1 - 6) = (2x + 5)(2x - 7)$$

$$\delta) 4 - (1 + 4x)^2 = 2^2 - (1 + 4x)^2 = [2 + (1 + 4x)][2 - (1 + 4x)] = (2 + 1 + 4x)(2 - 1 - 4x) = (3 + 4x)(1 - 4x)$$

$$\epsilon) (x + y)^2 - (x - y)^2 = [(x + y) + (x - y)] \cdot [(x + y) - (x - y)] = (x + y + x - y)(x + y - x + y) = 2x \cdot 2y = 4xy$$

$$\sigma\tau) 4\alpha^2 - 36\beta^2 = 4(\alpha^2 - 9\beta^2) = 4[\alpha^2 - (3\beta)^2] = 4(\alpha + 3\beta)(\alpha - 3\beta)$$

4η Περίπτωση: Ανάπτυγμα τετραγώνου

Από τις ταυτότητες $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ βλέπουμε ότι οι παραστάσεις της μορφής $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ μετατρέπονται σε γινόμενο.

Παράδειγμα:

Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις

$$\alpha) \alpha^2 + 4\alpha + 4$$

$$\beta) \kappa^2 - 2\kappa + 1$$

$$\gamma) 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$$\delta) x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

Λύση:

$$\alpha) \alpha^2 + 4\alpha + 4 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 2 + 2^2 = (\alpha + 2)^2$$

$$\beta) \kappa^2 - 2\kappa + 1 = \kappa^2 - 2 \cdot \kappa \cdot 1 + 1^2 = (\kappa - 1)^2$$

$$\gamma) 4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = (2x - 3y)^2$$

$$\delta) x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$$

5η Περίπτωση: Τριώνυμο

Λέμε **τριώνυμο 2^{ου} βαθμού** κάθε πολυώνυμο του x στο οποίο η μεγαλύτερη δύναμη του x που εμφανίζεται είναι το 2.

π.χ. $x^2 - 4x + 3$, $x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 3x + 2$ κ.λ.π.

Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο π.χ. το $x^2 - 5x + 6$ βρίσκουμε δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 6. Οι αριθμοί αυτοί είναι οι 2 και 3. Άρα $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Παράδειγμα:

Να γίνουν γινόμενο τα τριώνυμα:

α) $x^2 - 2x - 3$

β) $x^2 + 3x - 4$

γ) $x^2 - 5x + 4$

δ) $-x^2 + 5x - 6$

Λύση:

α) Βρίσκουμε δυο αριθμούς με άθροισμα 2 και γινόμενο -3. Αυτοί είναι -3 και +1.

$$\text{Άρα } x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

β) Βρίσκουμε δυο αριθμούς με άθροισμα -3 και γινόμενο -4. Αυτοί είναι οι 1 και -4.

$$\text{Άρα } x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

$$\text{γ) } x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$$

$$\text{δ) } -x^2 + 5x - 6 = -(x^2 - 5x + 6) = -(x - 2)(x - 3)$$

Σημείωση:

Πολλές φορές για να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση χρησιμοποιούμε περισσότερες από μια κατηγορίες παραγοντοποίησης που είδαμε παραπάνω. Αυτό φαίνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν:

Παράδειγμα:

Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α) $x^2 - 4xy + 3y^2$

β) $x^2 + 6x + 5 + (x + 1)(x - 3)$

γ) $x^4 + y^4 - 2x^2y^2$

Λύση:

$$\begin{aligned} \text{α) } x^2 - 4xy + 3y^2 &= x^2 - 4xy + 4y^2 - y^2 = (x - 2y)^2 - y^2 = (x - 2y + y)(x - 2y - y) = \\ &= (x - y)(x - 3y) \end{aligned}$$

(Γράψαμε το $3y^2$ σαν $4y^2 - y^2$. Αυτή η μέθοδος λέγεται **διόσπαση**).

$$\begin{aligned} \text{β) } x^2 + 6x + 5 + (x + 1)(x - 3) &= (x + 1)(x + 5) + (x + 1)(x - 3) = \\ &= (x + 1)(x + 5 + x - 3) = (x + 1)(2x + 2) = 2(x + 1)(x + 1) = 2(x + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{γ) } x^4 + y^4 - 2x^2y^2 &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2)^2 - 2x^2y^2 + (y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 = \\ &= [(x + y)(x - y)]^2 = (x + y)^2(x - y)^2 \end{aligned}$$

6 Κλασματικές Αλγεβρικές Παραστάσεις

Λέμε κλασματική **αλγεβρική παράσταση** κάθε αλγεβρική παράσταση που μπορεί να γραφεί σε μορφή κλάσματος το οποίο να περιέχει μεταβλητή στον παρανομαστή.

Μια κλασματική αλγεβρική παράσταση έχει νόημα μόνο για τις τιμές των μεταβλητών που δεν μηδενίζουν τον παρανομαστή.

π.χ. η κλασματική αλγεβρική παράσταση $\frac{x^2 + 4}{x - 1}$ έχει νόημα μόνο όταν $x \neq 1$

Πολλαπλασιασμός κλασματικών αλγεβρικών παραστάσεων

Για να πολλαπλασιάσουμε δυο κλασματικές παραστάσεις πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρανομαστή με παρανομαστή,

$$\text{Δηλαδή,} \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \quad \text{και} \quad \alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

Παράδειγμα:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} \cdot \frac{x^2 + 1}{x + 3} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 2x + 3x + 6} = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 5x + 6}$$

Παράδειγμα:

$$2x^2y \cdot \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{2x^2y}{1} \cdot \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{2x^2y(x+1)}{x^2+1}$$

Διαίρεση κλασματικών αλγεβρικών παραστάσεων

Για να διαιρέσουμε δυο κλασματικές παραστάσεις πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με την αντίστροφη της δεύτερης.

$$\text{Δηλαδή,} \quad \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Παράδειγμα:

$$\frac{2xy}{x+1} : \frac{x-1}{y} = \frac{2xy}{x+1} \cdot \frac{y}{x-1} = \frac{2xy \cdot y}{(x+1)(x-1)} = \frac{2xy^2}{x^2 - 1}$$

Παράδειγμα:

$$\frac{x^2 - 4}{x + y} : \frac{x - 2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - 4}{x + y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x - 2} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 - y^2)}{(x + y)(x - 2)}$$

Απλοποίηση κλασματικών αλγεβρικών παραστάσεων

Για να απλοποιήσουμε μια κλασματική αλγεβρική παράσταση μετατρέπουμε αριθμητή και παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων και στη συνέχεια απλοποιούμε τους κοινούς παράγοντες αν υπάρχουν.

Παράδειγμα:

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{2\alpha^3}{\beta} \cdot \frac{3\beta^2}{4\alpha^4}$$

$$\beta) \frac{3x-9}{x^2-9}$$

$$\gamma) \frac{x^2+5x+4}{x^2+6x+5}$$

$$\delta) \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$$

$$\epsilon) \frac{3x-2y}{2x+3y} \cdot \frac{4x^2-9y^2}{(3x-2y)^2}$$

Λύση:

$$\alpha) \frac{2\alpha^3}{\beta} \cdot \frac{3\beta^2}{4\alpha^4} = \frac{6\alpha^3\beta^2}{4\alpha^4\beta} = \frac{3\beta}{2\alpha}$$

$$\beta) \frac{3x-9}{x^2-9} = \frac{3(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{3}{x+3}$$

$$\gamma) \frac{x^2+5x+4}{x^2+6x+5} = \frac{(x+4)(x+1)}{(x+5)(x+1)} = \frac{x+4}{x+5}$$

$$\delta) \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}$$

$$\epsilon) \frac{3x-2y}{2x+3y} \cdot \frac{4x^2-9y^2}{(3x-2y)^2} = \frac{(3x-2y)(4x^2-9y^2)}{(2x+3y)(3x-2y)^2} = \frac{(3x-2y)(2x+3y)(2x-3y)}{(2x+3y)(3x-2y)^2} = \frac{2x-3y}{3x-2y}$$

Μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό

Για να μετατρέψουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό χρησιμοποιούμε την γνωστή ιδιότητα.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \quad (\text{μέσους} - \text{άκρους})$$

Παράδειγμα:

Να απλοποιηθούν τα κλάσματα.

$$\alpha) \frac{\frac{2x+2}{x}}{\frac{(x+1)^2}{x^2}} = \frac{(2x+2)x^2}{x(x+1)^2} = \frac{2x^2(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{2x}{x+1}$$

$$\beta) \frac{\frac{4\alpha^2 - 2\alpha\beta}{x+y}}{\frac{4\alpha^2}{x^2 - y^2}} = \frac{(4\alpha^2 - 2\alpha\beta)(x^2 - y^2)}{4\alpha^2(x+y)} = \frac{2\alpha(2\alpha - \beta)(x+y)(x-y)}{4\alpha^2(x+y)} = \frac{\alpha(2\alpha - \beta)(x-y)}{2(x+y)}$$



Τι πρέπει να προσέχουμε πάρα πολύ



Ποτέ δεν απλοποιούμε ένα κλάσμα εάν και ο αριθμητής και ο παρανομαστής δεν είναι παραγοντοποιημένοι.