

**ΟΡΙΑ - ΔΙΑΤΑΞΗ - ΠΡΑΞΕΙΣ - ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ - ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ -
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ - ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x^2 - 3} - 1}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2e^x \sqrt{x-5} + 27 \frac{|x+2006|}{x^2+2}$. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$

3. Αν $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + (5 + 2\alpha^2)x + \beta - 1}{x - \frac{1}{2}} = 15$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{9x^2 - 6x + 1} - |x - 5|}{1 - |x^3 + 7|}$.

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x}}$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{x - 1}$

6. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^4 - 5x^3 + 8 + \alpha)$ β) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 6x}{-x^5 - 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - e^x + \sqrt{-x^2 + 4})$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^{10} - 2)^{2011} | -x^{2011} - 2010 | \right]$

7. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{1 - x^5}$ β) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^3 + (1 - 2e)x^2 + (e^2 - 2e)x + e^2}{2x^2 - ex - e^2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7x+2} - 4x+1}{\sqrt{x}-1}$

8. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + \alpha x^3 - 2\beta}{x^2 - 1} = -1$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

9. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια της $h(x)$ στα $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ και στο $x_0 = e$ με:

$$h(x) = \begin{cases} 3x^{2011} + x, & x \leq 1 \\ 3^x + 5x^2 - 4x, & 1 < x \leq 2 \\ -5x^2 + x - \ln x, & x > 2 \end{cases}$$

10. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x} \sqrt{\frac{5x}{x^2-9}}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\alpha} \frac{3x|x+\alpha| - 5\sqrt{x^2+2\alpha x+\alpha^2}}{|x+\alpha|}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{7x-11}|}{|x-3|}$

11. Να υπολογίσετε αν υπάρχουν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x+2|}{x^2-4}$

β) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2-9x+4+|-x^2+4x|}{|x-4|}$

12. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} - 3}{x^2-1}$

13. Αν ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-5)^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$

14. Να υπολογιστούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3+x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+4}-2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(2x-6)}{3x-9}$

15. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ και πεδίο ορισμού $A = \{x \in \mathbf{R} | x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbf{Z}\}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

16. Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε $x^5 \leq f(x) \leq x^6 + 3x^4$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να

βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

17. Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ όταν:

α) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$

β) $f(x) = \frac{|\eta\mu x|}{x}$

18. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu 3x}$

19. Έστω συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε: $7x - x^3 < f(x) < x^4 + 5$ κοντά στο 1.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(2x^2 - 1)$.

20. Έστω συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με σύνολο τιμών $f(A) = (-5, 2)$. Να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} [\eta\mu x \cdot f(x)] = 0.$$

21. Έστω συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε: $|f(x) - \eta\mu^2 x| \leq x^4$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f(3x - 2)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0.$

22. Έστω συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε $-2 \leq f(x) \leq 3$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1)f(x)]$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2\alpha x + \beta + 2}{x^2 - 1}$ Αν το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x^2 - \beta x + 2, & x \leq -1 \\ -3\alpha x + 2\beta + 6, & x > -1 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, έτσι ώστε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$

25. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3| - 4|x-1| + 3}{|x-2|}$

26. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{x - 1}$

27. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{1 - \sqrt{x}}$

γ) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x - \sqrt{3x^2 - 4}}{x - \sqrt{2}}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{\sqrt[3]{x} - 1}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x - 3} + \frac{5}{-3x^2 + 13x - 12} \right)$

28. Έχουμε την συνάρτηση $g(x) = 4x^2 + (2 - \alpha)x + \beta$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

ώστε $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 18$, και $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 11x + g(x)}{-x^2 + 5x + 14} = 1$

29. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και να είναι πραγματικός

αριθμός με:

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + \alpha^2 x + \beta^2, & x < 1 \\ 2\alpha x^5 - 4\beta x + 2011 \cdot \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

30. Να υπολογίσετε αν υπάρχει το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| + 2x^2 - |3x-5|}{x^2 - 1}$

31. α) Έστω $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow 2} [-2f(x) + 3g(x)] = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} [5f(x) - 7g(x)] = -4$,
να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

β) Έστω $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)(x^3 - 8)] = 4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)]$.

γ) Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbf{R}$ και $4f^3(x) + xf^2(x) - 2x^2f(x) = 3x^3$. Να βρείτε το α και το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

32. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha \in \mathbf{R}^*$ και $\kappa \in \mathbf{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{\kappa x^2 - x + 3\sqrt{2}}{\alpha x + \alpha\sqrt{2}} = \sqrt{e}$.

33. Αν $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 1$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{h^3(x) + 3} - 2h(x)}$

34. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$, αν $\lim_{x \rightarrow e} \frac{2f(x) + \ln^2 x^2}{x \ln x - e^2 - e(\ln x - x)} = 3e$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha^2 x^4 + \beta x + 2011\gamma}{-2x^3 - x^2 + 4x + 3}$, αν $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{6}{5}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

36. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(x+y) = 3f(x) - f(y) - 2x + 2y + 1$.

α) Να βρείτε τα $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$.

β) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

37. Έστω $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $5f^3(x) - 10xf^2(x) + 4x^2f(x) = 8x^3$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbf{R}$.

Να βρείτε το k και το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 14x}{2011x^2 - 3x}$

38. Αν $2\sqrt{x+2} \leq f(x) \leq x+3$, για κάθε $x \geq -2$ να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-2}{x+1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2f^2(x)-8}{x^2+3x+2}$

39. Έστω $f(x) = \frac{a^2x+3a\eta\mu x}{x}$ και $g(x) = \frac{-2x^2-2x\sigma\upsilon\nu x+2x}{x^2}$. Να βρείτε το $a \in \mathbf{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

40. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2+4x-5}$

41. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x \cdot \eta\mu^7 x}$ και πεδίο ορισμού

$A = \{x \in \mathbf{R} | x \neq \kappa \frac{\pi}{7}, \kappa \in \mathbf{Z}\}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

42. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x+2) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ και πεδίο ορισμού $A = (-2, +\infty)$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

43. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \epsilon\phi x}{x^2}$.

44. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sigma\upsilon\nu(x-1) - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

45. Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε $1 - x\eta\mu x < f(x) < \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x}$ β) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

46. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Αν η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty, 0]$, να αποδείξετε ότι $0 < f^{-1}(x) \leq 1$ για κάθε $x \leq 0$.

δ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \cdot f^{-1}(x)]$.

47. Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $x \cdot f(x) > 0$, κοντά στο 0.

γ) Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $|x \cdot f(x) \cdot g(x) - x^2| \leq x^2 \cdot f^2(x)$ κοντά στο 0, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

48. Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε: $f(x) + 1 \geq \sqrt{x^2 + 1}$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$, $\ell \in \mathbf{R}$.

α) Να βρείτε το ℓ .

β) Αν $f(x) \leq f^2(x) + \frac{x^2}{2}$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

49. Έστω συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε: $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) Να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} f(1+h)$.

γ) Αν είναι $f(x) \neq 1$ κοντά στο 1, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^2(x) - 3| + f(x) - 3}{f(x) - 1}$.

50. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x \cdot e^{\eta\mu(\frac{1}{x})}$, για κάθε $x \in \mathbf{R}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{e} \leq f(x) \leq e \cdot x$, για κάθε $x > 0$ και $e \cdot x \leq f(x) \leq \frac{x}{e}$, για κάθε $x < 0$

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{2 + \sigma\upsilon\nu x}, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \varepsilon\varphi x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

51. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο . Να βρείτε, αν υπάρχει,

το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -2\eta\mu x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \alpha\eta\mu x + \beta + \gamma, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$$

52. Δίνεται η συνάρτηση , έτσι ώστε

να υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x)$ και να είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν οι αριθμοί α, β, γ μεταβάλλονται, να βρεθεί ο αριθμός α και η καμπύλη στην οποία βρίσκονται τα σημεία $M(\beta, \gamma)$.

53. Αν $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ \frac{x^3 + 3}{4}, & x \geq 1 \end{cases}$,

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την $f^{-1}(x)$.

β) Να βρείτε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1}$.

54. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $f(x) \neq 0$, έτσι ώστε να ισχύουν:

• $f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta) + \alpha\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$ και

• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - f(1)}{x - 1} = 7$,

Να βρείτε τον αριθμό $f(2)$.

55. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(-x)}{x} = 3$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x)}{x^2 + f^2(x)}$

56. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x^{2011}}{x} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$

57. Αν $|f(x) - \eta\mu x| \leq 1 - \sigma\upsilon\nu 2x$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

58. Αν $|f(x) - \eta\mu x| \leq 1 - \sigma\upsilon\nu 2x$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

59. Έστω συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε: $x - 1 \leq f(x) \leq |x - 1|$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \ell$, $\ell \in \mathbf{R}$ να βρείτε: α) το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) το ℓ

60. α) Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{|x^5 - 7| - 7}{x}$ και πεδίο ορισμού $A = \mathbf{R}^*$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

β) Έστω συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Αν η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{|x^5 - 7| - 7}{x} \cdot f(x) \right] = 0$$

61. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x^2 - 2x^2}$ και πεδίο ορισμού $A = \mathbf{R}^*$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$

62. Έστω συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε: $f^2(x) \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = 0$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

63. Έστω γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε: $f^{-1}(x) \leq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$

και $\lim_{x \rightarrow 1} f^2(x) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι: $y \leq \frac{y^2 + 1}{2}$, για κάθε $y \in \mathbf{R}$.

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

64. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ τέτοιες, ώστε: $-4x^3 \leq f(x) \leq 3x^4 + 1$, για κάθε

$x \in \mathbf{R}$, και $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) + 3}{x + 1} = 5$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 4}{x + 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)g(x) + 12}{x + 1}$.

65. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\sqrt{x - 3} \cdot \eta \mu^2 \left(\frac{1}{x - 3} \right) \right]$