

Διδακτική ενότητα: Ρίζες πραγματικών αριθμών

1. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις :

i) $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

ii) $B = \frac{x+1}{\sqrt{4-2x}}$

iii) $\Gamma = \sqrt{|x|-x}$

2. Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

3. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$

4. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Αν $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$

5. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

6. Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5} + \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε η παράσταση, να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $d(x, 2) < 3$, να δείξετε ότι η παράσταση K είναι ανεξάρτητη του x .

7. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή :

i) $\frac{4}{\sqrt{12}}$

ii) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

iii) $\frac{1+3\sqrt{2}}{1-3\sqrt{2}}$

iv) $\frac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

v) $\frac{x-3}{\sqrt{x^2+7}-4}$

8. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, w για τους οποίους ισχύει :

$$|x-1| + (2y-x+3)^2 + \sqrt{5x+2y-w} = 0$$

9. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις $A = \frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$ και $B = \frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}}$

10. Δίνεται η παράσταση : $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = 4$

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x + A| = 1$

11. Έστω $A = \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$, να δείξετε ότι :

α) $A > 0$

β) Να βρείτε το A^2

γ) Να βρείτε την τιμή του A .

12. Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[5]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B .

13. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$ α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$

14. Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

15. α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$

16. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41, \quad \sqrt{3} \cong 1,73, \quad \sqrt{5} \cong 2,24, \quad \sqrt{7} \cong 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να

υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

17. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : i) $A = \sqrt[3]{4 - \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{121}}}$ ii) $B = \frac{\sqrt[3]{5\sqrt{3}} - \sqrt[4]{3\sqrt[5]{9}} + \sqrt{9}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{3}}}$

18. Θεωρούμε τις παραστάσεις : $\alpha = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{50}}{\sqrt{12} - \sqrt{75}} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}}$, $\beta = \frac{7}{1 - 2\sqrt{2}} + 2 + 2\sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}}$

α) Να βρείτε τις τιμές των α , β , γ .

β) Να βρείτε τα αναπτύγματα $(\alpha + 2\sqrt{\gamma})^2$ και $(\alpha - 2\sqrt{\gamma})^2$ στη συνέχεια να αποδείξετε ότι :

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{\gamma}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{\gamma}} = 2$$

γ) Να αποδείξετε ότι : $\sqrt[3]{2\gamma} \cdot \sqrt[3]{\beta + \sqrt{\beta + \gamma}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\beta + \gamma} - \beta} = 2$

δ) Αν $\alpha < x < \gamma$, να απλοποιήσετε την παράσταση : $K = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$.