

Διδακτική ενότητα : Διάταξη πραγματικών αριθμών

Ερωτήσεις τύπου «Σωστό - Λάθος»

- | | | |
|--|---|---|
| 1. Αν $x < 2$ και $y > 3$, τότε $3x - 2y < 0$ | Σ | Λ |
| 2. Αν $x - \psi > 0$, τότε $x > \psi$ | Σ | Λ |
| 3. Αν $2 < x < \psi$, τότε $x \cdot \psi > 0$ | Σ | Λ |
| 4. Αν $2 < x < \psi$, τότε $x \cdot \psi - \psi^2 > 0$ | Σ | Λ |
| 5. Αν $x > 1$, τότε $x^3 > 1$ | Σ | Λ |
| 6. Αν $x > 1$, τότε $x^{-2} > 1$ | Σ | Λ |
| 7. Αν $x < 0 < \psi$, τότε $\frac{1}{x} < \frac{1}{\psi}$ | Σ | Λ |
| 8. Αν $0 < x < \psi$, τότε $\frac{1}{x} < \frac{1}{\psi}$ | Σ | Λ |
| 9. Αν $0 < x < 1$ και $\kappa > \lambda$ (κ, λ φυσικοί), τότε $x^\kappa < x^\lambda$ | Σ | Λ |

Ερωτήσεις αντιστοίχισης - διάταξης –συμπλήρωσης

1. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν: $1,5 < \alpha < 3,5$ και $2,5 \leq \beta \leq 5,5$.
Κάθε παράσταση της πρώτης στήλης ανήκει σε ένα μόνο διάστημα της δεύτερης στήλης. Συνδέστε με μία γραμμή κάθε παράσταση της πρώτης στήλης με το αντίστοιχο διάστημα της δεύτερης στήλης:

Παράσταση	διάστημα
i. $\alpha + \beta$	1. $[4, 9]$
ii. $\alpha - \beta$	2. $(4, 9)$
iii. $2\alpha - 1$	3. $(-4, 1)$
iv. $1 - 2\beta$	4. $(2, 6)$
	5. $(10, -4)$
	6. $[-10, -4]$

2. Αν $0 < \alpha < 1$ να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\frac{1}{\alpha}, \alpha - 1, 1, 0, \alpha, \frac{\alpha + 1}{2}$$

3. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, ψ για τους οποίους ισχύει $2 < x < \psi$. Να γράψετε σε αύξουσα σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $x^2, (x-1)^2, \psi^2, (\psi+1)^2$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, όπως φαίνεται στην πρώτη γραμμή:

Ανισότητα που ικανοποιεί ο πραγματικός αριθμός x	Διάστημα στο οποίο ανήκει ο πραγματικός αριθμός x
$1 < x \leq 3$	$x \in (1, 3]$
.....	$x \in [2, +\infty)$
$x \leq 8$	
.....	$x \in (-3, 2)$
$-1 \leq x \leq 0$	
$-5 \leq x < 5$	

Ασκήσεις ανάπτυξης

1. Να δείξετε ότι **i)** $\alpha^2 + 9 \geq 3\alpha(4 - \alpha)$ **ii)** $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 4) \geq (\alpha\beta + 2)^2$ **iii)** $x^2 + y^2 - 4x + 6y \geq -13$

2. Αν $\alpha < 2 \leq \beta$ να δείξετε ότι $\alpha\beta + 4 \leq 2\alpha + 2\beta$.

3. Αν $\alpha > \beta$ και $\alpha^2 - \beta^2 > 1$, να δείξετε ότι $\alpha > 0$ και στη συνέχεια ότι $\alpha > 1$.

4. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 1$, να δείξετε ότι :

i) $\beta < 1$ **ii)** $\alpha\beta \leq \frac{1}{4}$ τότε ισχύει η ισότητα ; **iii)** $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2}$.

5. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Να δείξετε ότι:

α) $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$ **β)** $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

6. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ **β)** $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

7. **i)** Αν $\alpha, \beta > 0$ να δείξετε ότι : $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$ **ii)** Αν $x, y, \omega > 0$ να δείξετε ότι : $\frac{x+y}{\omega} + \frac{y+\omega}{x} + \frac{\omega+x}{y} \geq 6$

8. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ για τους οποίους ισχύει : $\frac{\kappa^2 + \lambda^2}{2} = \kappa - \lambda - 1$
- i) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ ii) Να αποδείξετε ότι : $\lambda \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \leq \kappa$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iii) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} + \frac{\beta}{\beta^2 + 1} \leq 1$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- iv) Να αποδείξετε ότι $1 \leq \frac{y^2 + y + 1}{y^2 + 1} + \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + 1} \leq 3$ για κάθε $y, z \in \mathbb{R}$.
9. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε i) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 < \alpha$ ii) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς : $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$.
10. Δίνονται τα σύνολα : $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 2\}$, $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$, $\Delta = \{x \in \mathbb{R} / x < -1\}$ i) Να γράψετε τα παραπάνω σύνολα με μορφή διαστήματος.
11. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν: $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις: α) $\alpha - 2\beta$ β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$.
12. Έστω $1 < x \leq 4$ και $3 \leq y < 4$, να βρείτε το διάστημα στο οποίο ανήκει κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις : $A = 2x - 3y$ $B = x^2 - y^3$ $\Gamma = \frac{2x + 5}{3}$ $\Delta = \frac{x - 1}{y}$
13. Για το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου γνωρίζουμε ότι : $x \in [3, 5]$ και $y \in [1, 2]$. Αν ελαττώσουμε το πλάτος κατά 1 και τριπλασιάσουμε το μήκος , να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή α. της περιμέτρου β. του εμβαδού του νέου ορθογωνίου που προκύπτει.
14. Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .
 α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$
 β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.
15. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:
 α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
 β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

