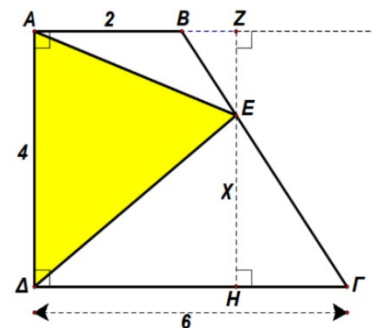


Επαναληπτικές Ασκήσεις στις συναρτήσεις από την Τράπεζα Θεμάτων

1. Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_1(t) = 150 + 50t$, $t \in [0, 5]$. Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t) = 650 - 25t$.
- α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;
 β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^ο μέχρι το 10^ο λεπτό της κίνησής του; γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.
 δ) i) Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;
 ii) Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;
2. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε ΑΒ=2, ΑΔ=4, ΓΔ=6, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.
- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης; β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$. γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) \dots + f\left(\frac{64}{16}\right)$.
3. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, Ε ένα σημείο του $x'x$ άξονα και Ο είναι η αρχή των αξόνων. Η εξίσωση της ευθείας ΔΕ είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Δ. Ένα σημείο Γ(t, y_Γ) κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και Β ένα σημείο του $x'x$ άξονα, τέτοιο ώστε ΒΓ να είναι παράλληλη στον $y'y$ άξονα. β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$. γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{4}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραpezίου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.
 δ) Αν το εμβαδόν του τραpezίου ισούται με 9,75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$. α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$. β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$. γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x) = f(2-x)$. β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48)$. γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f



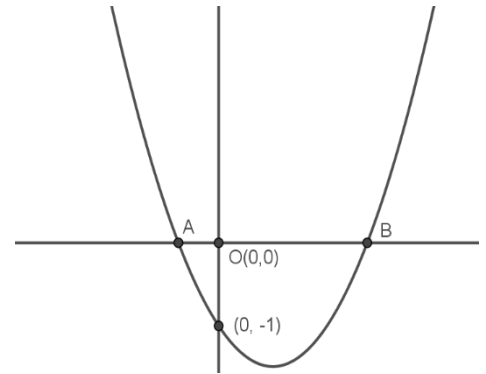
έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$. **δ)** Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

6. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$ με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i)** $\gamma = -1$ **ii)** Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες $A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$ και $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.



7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$. **α) i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$ για κάθε $x \in A$. **β)** Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

8. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{1 - 2x + x^2}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A . Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

β i. Να δείξετε ότι $A=2$ **ii.** Να λύσετε την εξίσωση $|x - 3| - |x - 1| = 2$.

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3-x$ και $g(x)=x-1$ για $1 \leq x \leq 3$. **ii.** Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x) - g(x)|=2$.

9. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της

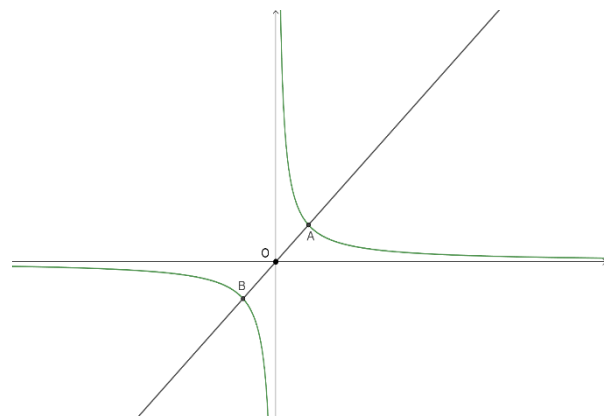
$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ και η ευθεία } AB \text{ με εξίσωση } y = x.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το $O(0,0)$ είναι το μέσο του AB .

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f .

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1), M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB) \leq (MM')$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB) = (MM')$.



10. Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης A ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 0,5x + 12, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$.

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν: **i)** έλλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό, **ii)** έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού, **iii)** έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β) Σε μια άλλη πόλη B , το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο: $g(x) = 12 + 0,6x$, για $x \geq 0$. Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B , να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . γ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$. δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

12. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x - 2|$ και $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε
i) τα σημεία τομής των C_f και C_g .

ii) τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g .

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα αi) και

αii). γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η παράσταση $A = \frac{\sqrt{1 - f(x)}}{f(x)}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$. Να βρείτε:

- α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .
γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

14. Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x - 2| \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

α) Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε την τιμή των συντεταγμένων των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων C_f και C_g . β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g . δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται στους πραγματικούς

αριθμούς η παράσταση: $K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)}$

15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

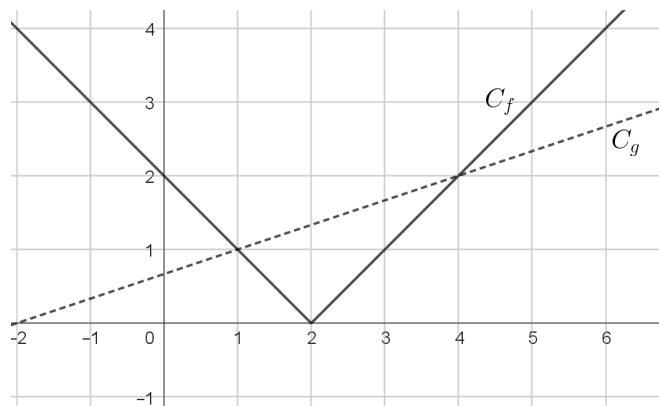
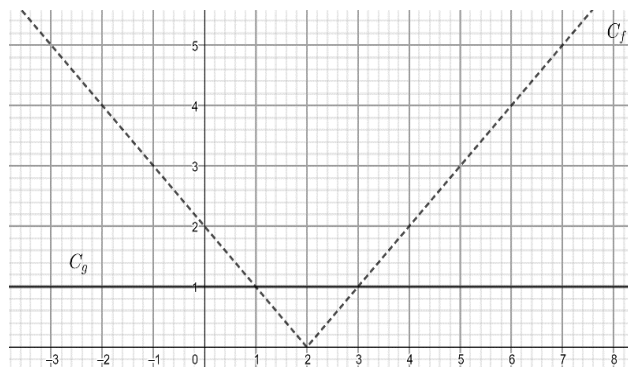
$$A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) \quad \beta) \text{ Να αποδείξετε ότι } (f(x))^2 - (g(x))^2 = 4 \text{ για οποιοδήποτε αριθμό } x \text{ με } x \neq 0$$

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|\alpha| \geq 2$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .



17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|κ| x - 2$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - κ^2, κ \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $κ \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου $κ$.

γ) Για $κ = -3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).

18. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{16}{x}, x > 0$. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στη

γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω Α και Β οι προβολές του Μ στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περιμέτρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη

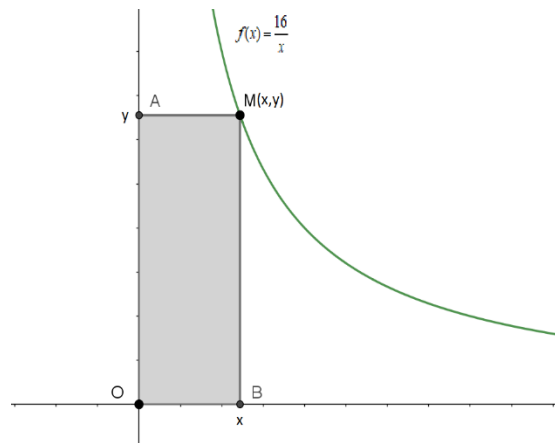
συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}, x > 0$ όπου x η τετμημένη του Μ.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

γ) Αν Μ' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜ'Β να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το Μ' έχει τετμημένη 4.

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΟΑΜ'Β έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ, δηλαδή ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$.



19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x - 1)^2$ και $g(x) = |x - 1| + 2, με x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

β) Να δείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x + 3, & x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g .

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

20. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

21. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1,

τότε: i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$. ii) Για $\alpha = 2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha = 3, \alpha = -2, \alpha = 1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

22. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$. δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο σύνολο A .

24. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2 - \lambda^2, \mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. α) Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ . β) Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ . γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$ i) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A, B . ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων.

25. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$ α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

γ) Αν είναι $f(x) = x + 2$, $x \neq -1$, τότε: i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$. ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$. γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$

27. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

συνάρτησης g . β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες.

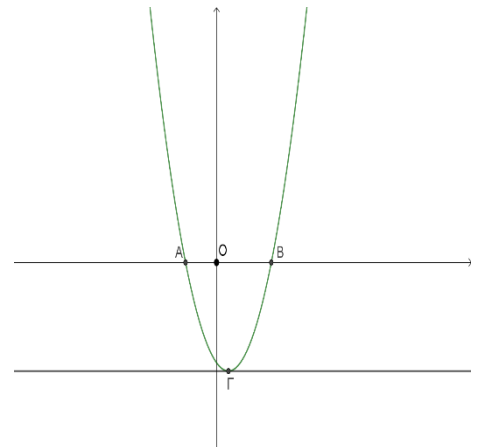
28. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = x^2 - x - 3$. Αν $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, \delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό

σημείο, τότε: α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ και

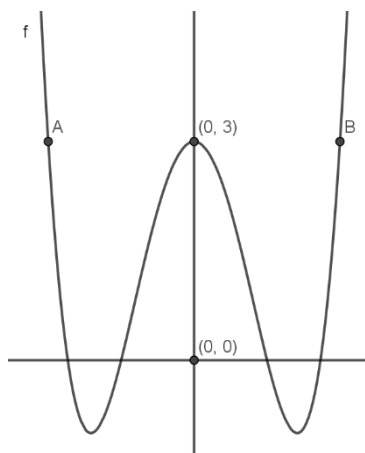
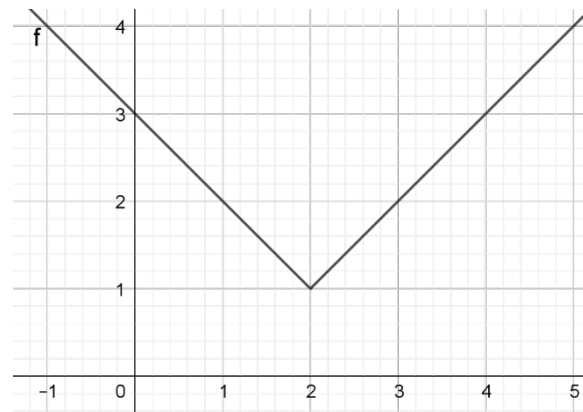
β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$. γ) Να δείξετε ότι $\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ .



29. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα: **α) i.** Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος **α)i).** **β)** Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$. **γ) i.** Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος **β)**, με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$; **ii.** Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος **γ)i)**



30. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^4 - 4x^2 + \gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. **α)** Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

β) Αν $A(a^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3a, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f .

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος **γ)**, να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$. **α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f . **β)** Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f

να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$. **γ)** Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$. **α)** Να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha < \beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$ **ii.** Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$

βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ και η ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **α)** Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική

παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. **β)** Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < 1$, τότε η C_f έχει με την

ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες. **γ)** Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε

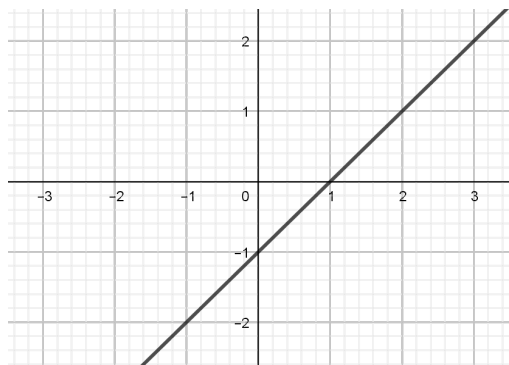
πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + 4 - (|6 - 2x| + 2)$ με $x \in \mathbb{R}$. **α)** Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x - 3|$

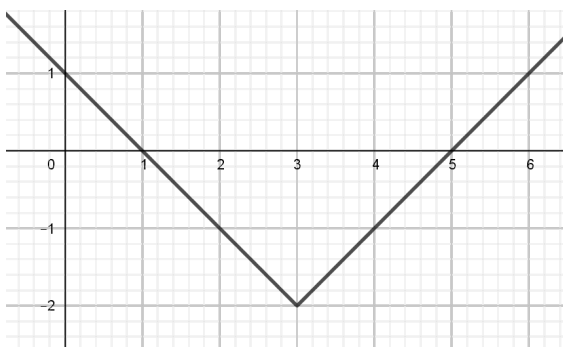
β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{αν } x < 3 \\ 5 - x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή

σας. Η γραφική παράσταση της f είναι: **γ)** i Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2 - |x - 3| > -1$ **ii** Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

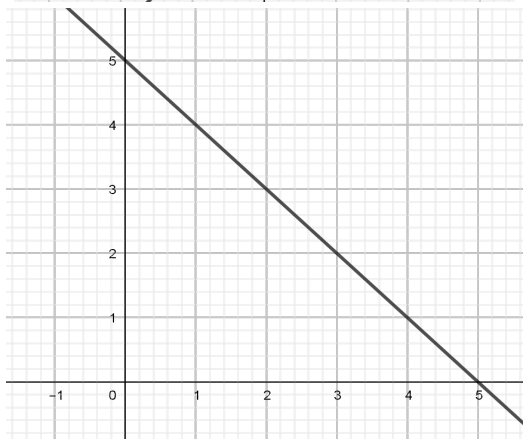
1)



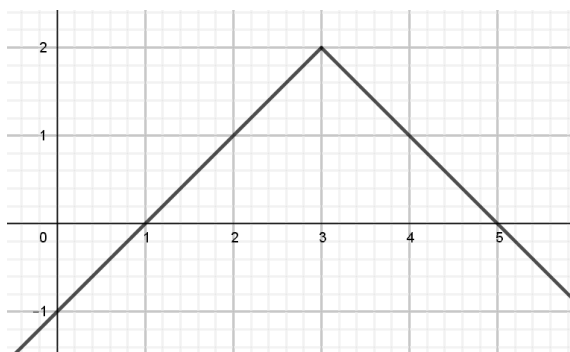
2)



3)



4)



35. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$.

Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ.

Αν $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$, $\Gamma(0, 2)$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g . γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).

36. Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1^{ου}

τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα. α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες του σημείου B. β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A και B έχει κλίση $\alpha = -1$. γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2, 4)$ αντίστοιχα, τότε:

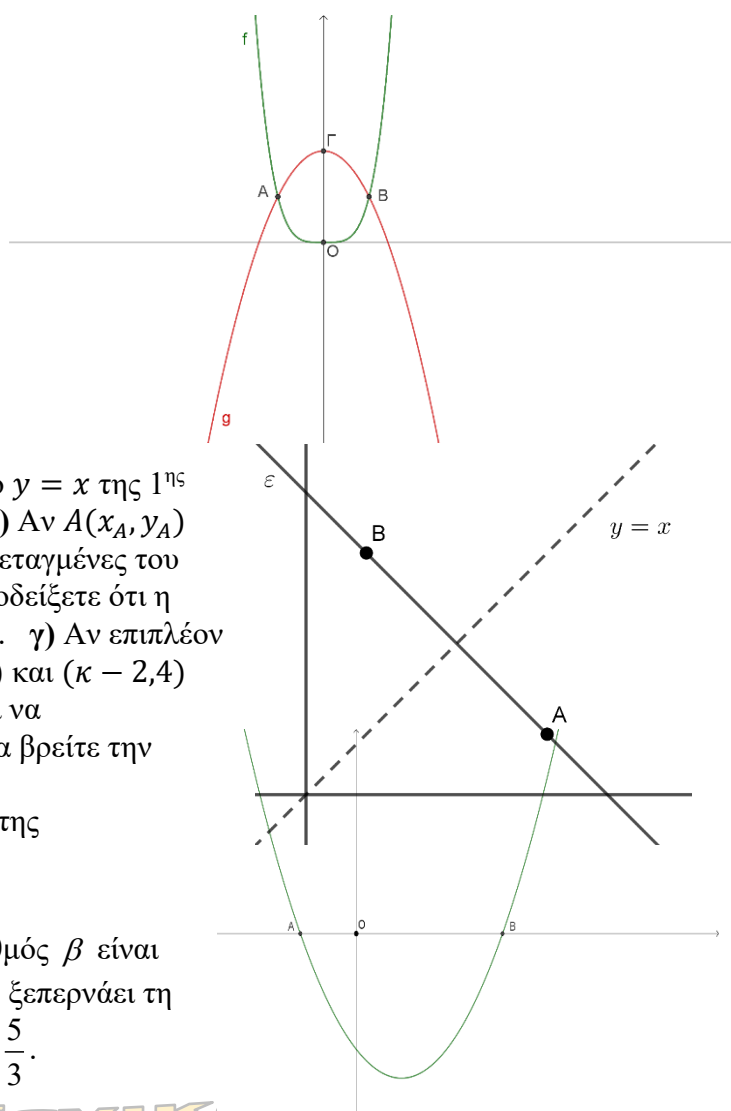
i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B.

ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

37. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$. Αν $A(\omega, 0)$, $B(\phi, 0)$

α) Να δείξετε ότι : i. $\omega + \phi = 1$. ii. $\omega \cdot \phi = -1$.

β) Να δείξετε ότι $(OB) > (OA)$. γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta > \phi$. δ) Να δείξετε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.



38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$. Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές. β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ .

39. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x) = |x - 1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

40. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$. β) Για $\beta = -1$

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $x \in A$. γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$.

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

43. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x|$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$, i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι $f(x) < g(x)$.

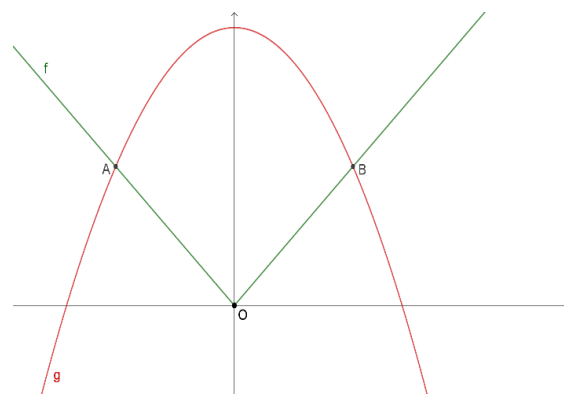
ii. Να

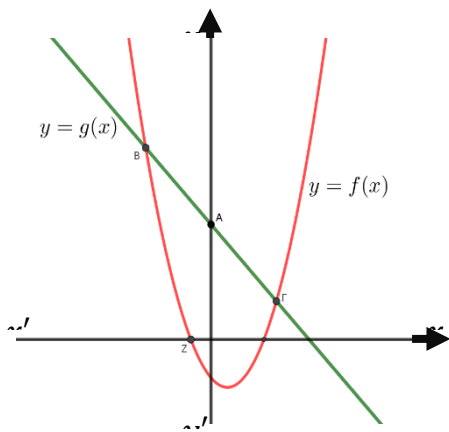
λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi).

44. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x+y=10$. α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2)$ με $x \in (0,10)$. β) i. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$.

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

γ) Αν $x=5$, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του;





45. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα. **α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$. **γ)** Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α , η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.

46. Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in [0, 6] \\ 16, & x \in (6, 9] \\ 25 - x, & x \in (9, 12] \end{cases} \quad \text{και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.}$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα. **β)** Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

Διατηρείται σταθερή. **ii.** Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

47. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου. **α)**

i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι:

$$y = 5 - 2x, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από τη σχέση $E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2$,

$$x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

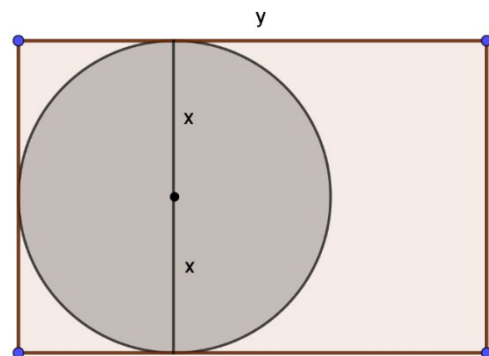
β) Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση: $E = 10x - (\pi + 4)x^2$, $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$. **γ)**

Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6 - \pi)\text{cm}^2$ και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε: **i.** την ακτίνα x του κύκλου. **ii.** τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 8x + \lambda}}{x - 4} + 2$, για $x \neq 4$ και $\lambda \geq 16$. **α)** Να βρείτε το $\lambda \geq 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0, -1)$. **β)** Αν $\lambda = 16$, τότε: **i.** Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}$. **ii.** Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f . **iii.** Για $x < 4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1, -1)$ είναι 10 μονάδες μήκους.

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$. **α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . **β)** Να αποδείξετε

ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$. **γ)** Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$



50. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. γ) Έστω $\alpha > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου M της γραφικής παράστασης της f . Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΟΓΜΔ$ του σχήματος, να αποδείξετε ότι :

i. $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$. ii. $E \geq 4$.

51. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 0$, παράμετρος. α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους C_f , C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. β) Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f , C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f , C_g , να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε να ισχύει $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

52. α) Να αποδείξετε ότι $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Πότε ισχύει το ίσον; β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία E και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο A , με τετμημένη α , κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και E . Φέρνουμε από το A κάθετους στους άξονες και έστω B και Γ τα σημεία τομής με $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα. i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΑΒΟΓ$. ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου $ΑΒΟΓ$ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου A επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;

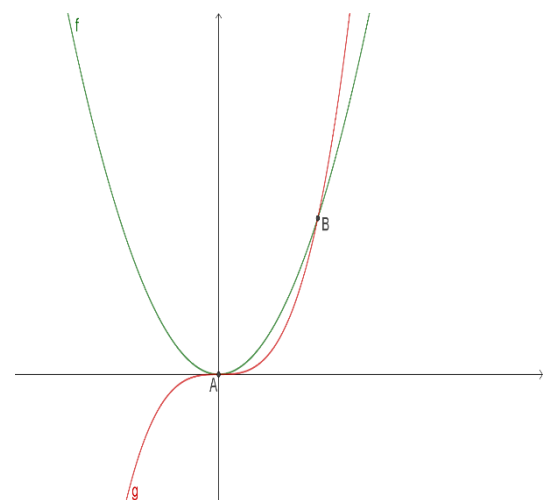
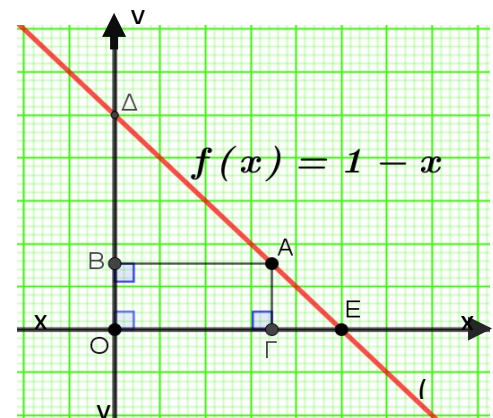
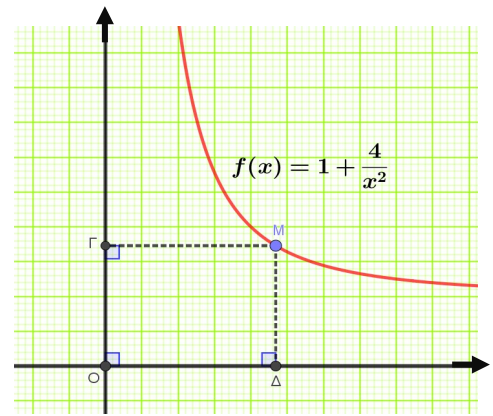
53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x-3, & x > 2 \\ -x+3, & x < 2 \end{cases}$.

γ) i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f .

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

54. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ που τέμνονται στα σημεία A, B . α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B . Έστω $A(0,0), B(1,1)$. β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει ότι $x^3 < x^2$. γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι i. $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$ ii. $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$



55. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-a}$ όπου $a \in \mathbb{R}$.

α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$.

β) Αν $a = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

γ) i. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2,1)$ και $(3,\sqrt{2})$ αντίστοιχα.

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$.

iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

56. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο

παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με διαστάσεις

$15m$ και $25m$. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος $x m$ ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 4x^2 + 80x, x > 0.$$

β) Να βρείτε το πλάτος x της

ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500 m^2$ γ) Ποιο μπορεί να είναι

το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500 m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

57. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α . β) Για $\alpha = 1$, i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$. ii) να λύσετε την ανίσωση:

$f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

58. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές $AB = x$ και $AG = y$, έτσι ώστε $x + y = 10$. α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο

ορισμού της συνάρτησης $E(x)$. β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, να δείξετε ότι

$E(x) \leq \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in (0,10)$. γ) Να βρείτε την τιμή του $x \in (0,10)$ ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνεται

μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

59. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες. δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο του ημιάξονα Ox .

60. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$. Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε: α) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = -2x + 2$,

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(1)$, γ) τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g ,

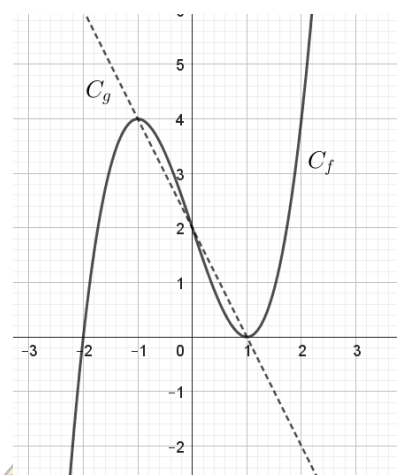
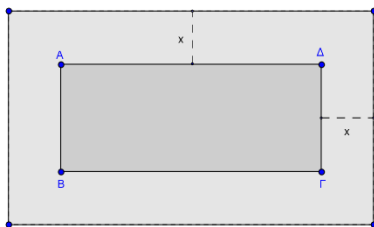
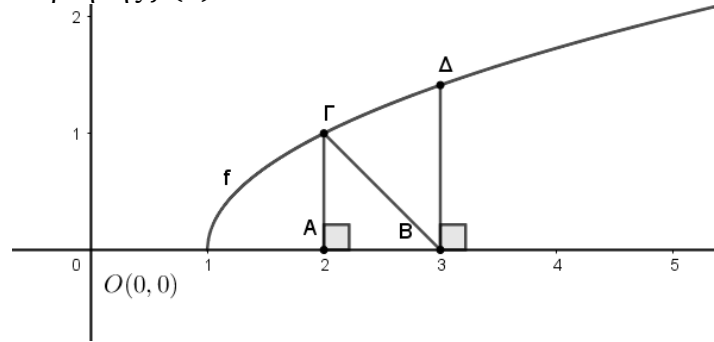
δ) τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

61. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. β) Να βρείτε τις τετμημένες των

σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M



ισχύει: $|2x-1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

62. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .

γ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

63. Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια ημέρα, η εταιρία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y = 60 + 0,20x$ Όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. **α)** Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α ο οποίος, σε μια ημέρα, ταξίδεψε 400km; **β)** Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε ένας πελάτης ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ; **γ)** Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο: $y = 80 + 0,10x$ όπου, όπως και προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. **δ)** Αν $f(x) = 60 + 0,20x$ και $g(x) = 0,80 + 0,10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή κάθε μιας από τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα το ερωτήματος γ).

64. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = ax^2$, $x \in \mathbb{R}$ με παράμετρο a

α) Αν το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $a = 2$.

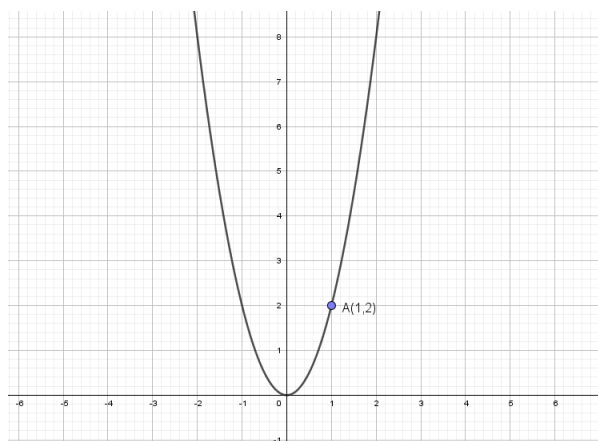
β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1,6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

γ) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x + 4$.

ii. Να

λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.



65. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x < 0 \\ x+2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής

παραστάσης C_f της f με τον άξονα $y'y$. **β) i)** Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. **ii)** Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι

συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **γ) i)** Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

66. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$. **α)** Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας. **β) i.** Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. **ii.** Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β)i. **γ)** Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.

