

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $\frac{6}{x+2} + \frac{x+2}{2-x} = \frac{x^2}{4-x^2}$ ii) $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$
2. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $2(|x-5|-3) = 4$ ii) $|2x+1|=0$ iii) $|4x+3|+7=0$
iv) $|x-2|=2|x+1|$ v) $|x^2-1|+|x+1|=0$
3. Να λυθούν οι εξισώσεις:
i) $\frac{|6-5x|+5}{3} - \frac{1-|21-10x|}{6} = \frac{|5x-6|-3}{2}$ ii) $\frac{|x^2-x|+4}{2} - |x^2-x|+1 = \frac{12+|x-x^2|}{2}$
iii) $|5x-2|=3x+2$ iv) $2|3x-4|+2(x+3)=1-x$ v) $2|x-1|+x-3(x-1)=1$
4. Να λυθούν οι εξισώσεις:
i) $||x|+3|=4$ ii) $||x-2|+3|=5$ iii) $\left| \frac{5x}{|x|+3} \right| = 3$ iv) $||x-1|-2|=|2|x-1|-3|$

B. Παραμετρικές Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

5. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τις εξισώσεις:
i) $\lambda x - \lambda = \lambda^2 - x$ ii) $\lambda^2 x - 4\lambda = \lambda^2 + 16x$ iii) $\lambda^2(x+3) = \lambda(3x-1) + \lambda^3 + 3$
6. Αν η εξίσωση $\lambda^2(x-1) = 9(x+1) + 6\lambda$ είναι αδύνατη, να δείξετε ότι η εξίσωση $3(2\lambda - 3x - 3) = \lambda^2(1-x)$ έχει άπειρες λύσεις.
7. Να βρείτε τα λ, μ ώστε η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = \lambda + \mu - 2$ να είναι αόριστη.
8. Να βρείτε το λ ώστε οι εξισώσεις $(\lambda - 2)x = \lambda + 2$ και $\lambda^2 x - \lambda = 4x + 5$ είναι συγχρόνως αδύνατες.
9. Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.
γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
10. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)
α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.
β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.
γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4
δ) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε να έχει i) ρίζα το 2 ii) να έχει μοναδική ρίζα το 2
11. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.
α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις: i) όταν $\alpha = 1$ ii) όταν $\alpha = -3$
β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^v = \alpha$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $x^3 - 27 = 0$ ii) $x^5 - \frac{1}{32} = 0$ iii) $x^3 + 64 = 0$
 iv) $3x^4 + 81x = 0$ v) $3x^6 + 10 = 0$ vi) $2x^6 - 18x^2 = 0$
13. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $(x - 1)^4 = 32$ ii) $(2x - 3)^7 - 1 = 0$ iii) $8(x + 1)^3 + 27 = 0$ iv) $(x + 2)^4 - 8(x + 2) = 0$
14. Να λύσετε την εξίσωση: $(x - 1)^3 = \left(\sqrt{2^3 \sqrt{2}}\right)^4$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

15. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ ii) $6x^2 + |x| - 1 = 0$ iii) $x - \sqrt{x} = 20$
 iv) $2\left(\frac{3x+2}{x-3}\right)^2 - 5\left(\frac{3x+2}{x-3}\right) + 3 = 0$ v) $(x+1)^2 + |x+1| - 2 = 0$ vi) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$
16. α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$ β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$.
17. Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς: i) 1 και 4 ii) -2 και 5
 iii) $3 - \sqrt{2}$ και $3 + \sqrt{2}$ iv) $1 + \sqrt{3}$ και $4 - \sqrt{3}$
18. α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm.
 i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60$ cm².
 ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.
 β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm² και διαγώνιο 8 cm.
19. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$.
 α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.
 β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β , και να τους βρείτε.
20. Έστω η εξίσωση $3x^4 + (\kappa^4 - 2\kappa^2 + 1)x^3 - (3\kappa + 2)x^2 - 2 = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$
 i) Βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η εξίσωση είναι διτετράγωνη.
 ii) Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του κ να λύσετε την εξίσωση.
21. Αν η εξίσωση $(2x - 3)|\lambda| + 3 = 2\lambda^2 x$ έχει ρίζα τον αριθμό 2, να υπολογιστεί ο λ .
22. Να λύσετε στο διάστημα $(2, +\infty)$ την εξίσωση $\frac{\sqrt[3]{(x-2)^3}}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} - 2\frac{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}{1 - x^2} = 2$
23. Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:
 $t_A < t_B$, $t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3}$ και $|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$.

α) i) Να δείξετε ότι: $t_A = \frac{t_A + t_B}{2}$ ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A + t_B = 6$ και $t_A \cdot t_B = 8$

i) Να γράψετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

B. Παραμετρικές Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

24. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$.

25. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3 = 0$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε η παραπάνω εξίσωση:

i) να έχει μία ρίζα

ii) να έχει διπλή ρίζα

26. Αν η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης $x(32 - x) = 31$ επαληθεύει την εξίσωση $\lambda^2(x + 4\mu^2) + 2\lambda(x + 2\lambda\mu) + x + \lambda^2 = 0$, να βρείτε τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

27. Δίνετε η εξίσωση $|x - 1| + 6|a| = 9 + a^2$ με $a \in \mathbb{R}$ η οποία έχει ρίζα τον αριθμό $x = 1$.

i) να βρείτε τις τιμές του a .

ii) να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

28. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες.

ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $x_1 + x_2$

β) $x_1 \cdot x_2$

γ) $x_1^2 + x_2^2$

δ) $x_1 \cdot x_2^2 + x_2 \cdot x_1^2$

29. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$

30. Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου

και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε: i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές η αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε

ότι $\sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$. ε) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε

να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1.

31. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

β) Να δείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή:

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$$

γ) Να δείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες

πραγματικές και άνισες. δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού.

32. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \text{ με } \lambda \in (0,4) \quad \alpha) \text{ Να βρείτε:}$$

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0,4)$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

33. Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 - (\alpha + 1)x^2 + \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}$

34. Να δειχθεί ότι αν η εξίσωση $(2\alpha - \beta)x^2 - 4\alpha x + 4\beta = 0$ έχει διπλή ρίζα, τότε η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2x + 3(\alpha - \beta) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες

35. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0, \text{ με } \lambda \in (0,2) \quad \alpha) \text{ Να βρείτε:}$$

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0,2)$.

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

36. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του

$$\lambda \text{ ισχύει } d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$$

37. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + |\lambda - 1| = 0$ (1)

i) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές

ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) και ισχύει: $x_1 = 2x_2$ να βρείτε τις ρίζες x_1 και x_2 και το λ

38. α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1). β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους

οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$. i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

39. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (5\lambda - 6\mu)x - 1 = 0$ είναι αντίθετες και οι ρίζες της εξίσωσης $\lambda x^2 + 13x - \lambda\mu + \lambda^2 = 0$ με $\lambda \neq 0$ είναι αντίστροφες τότε:

i) να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ και μ

ii) να λυθούν οι εξισώσεις για τις τιμές των λ και μ που βρήκατε.

40. Δίνεται η εξίσωση $2011x^2 - 2011x + 502 = 0$. Να αποδείξετε ότι:
 i) η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 άνισες. ii) $x_1 + x_2 = 1$
 iii) $0 < x_1 < 1$ και $0 < x_2 < 1$ iv) $\sqrt{x_1^2 + 4x_2} + \sqrt{x_2^2 + 4x_1} = 3$
41. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 2x + 3(\lambda - 7) = 0$ να είναι:
 i) θετικές, ii) ετερόσημες, iii) ίσες.
42. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + (2\lambda + 1)x + 2\lambda = 0$ έχει δύο ρίζες από τις οποίες η μία είναι τριπλάσια της άλλης.
43. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.
 α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.
 β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.
 γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον: $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:
 i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$. ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ .
44. Δίνεται η εξίσωση $(3\lambda - 1)x^2 - x - 1 = 0$ (1) Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση (1)
 α. να είναι δευτέρου βαθμού β. Να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
 γ) Αν x_1, x_2 οι άνισες ρίζες της (1) να βρείτε το λ ώστε:
 i. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -1$ ii. $2x_1 + 2x_2 < 1$
45. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.
 i) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
 ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης να ισχύει η σχέση $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$.
46. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$. α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.
 β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$.
 γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$
47. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε: i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$. ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:
 $A = x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$