

Διδακτική ενότητα: Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

1. Αν $-1 < x < 2$, να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις :

i) $A = |2x - 4| + \left| \frac{x^2 + 1}{2 - x} \right|$

ii) $B = |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + |2x - 7|$

2. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση : $A = |x + 2| - 3x + 1$

3. Να βρείτε τις τιμές των x , y για τις οποίες ισχύει : i) $2|x - 1| - 8 = 0$ ii) $|2x + 1| = -8$

iii) $|4x - 3| - |3x - 4| = 0$

iv) $|x - 3| = x - 3$

v) $|2x - 3| = 3 - 2x$

vi) $|x - 3| + |3x - 2y + 5| = 0$

vii) $d(x, 3) = d(2x, -1)$.

4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει :

i) $2|x - 1| - 8 \leq 0$

ii) $|x + 1| > 3$

iii) $|x - 3| < |x - 7|$

iv) $d(x, -2) \geq 1$

v) $d(x, 3) < -2$

5. Αν για τους αριθμούς α , β , γ ισχύει : $|\alpha| = 1$, $|\beta| = 2$ και $|\gamma| = 3$, να δείξετε ότι :

i) $|\alpha + \beta + \gamma| \leq 6$

ii) $|\alpha - \beta + 2\gamma| \leq 9$.

6. α) Να αποδείξετε ότι : $|\alpha - \gamma| \leq |\alpha + \beta| + |\beta + \gamma|$

β) Αν $|z - 2| \leq 1$ και $|w - 5| \leq 2$, να δείξετε ότι : i) $|z + w - 4| \leq 6$

ii) $|z - w + 4| \leq 4$.

7. Αν ισχύει : $\left| \frac{3\alpha + 1}{\alpha + 3} \right| < 1$, να δείξετε ότι : $|\alpha| < 1$.

8. i) Να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2$

ii) Αν για τους αριθμούς α , β ισχύουν : $|\alpha| \leq 2$, $|\beta| \leq 2$ και $|\alpha - \beta| = \sqrt{7}$ να δείξετε $|\alpha + \beta| \leq 3$.

9. Δίνονται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$ α) Για ποιες τιμές του x , ορίζεται η παράσταση A;

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A. γ) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε $A \leq 3$.

10. Αν ισχύει τους $|3\alpha + 2\beta| < |6\alpha + \beta|$, $\beta \neq 0$ να δείξετε :

α) $\alpha \neq 0$

β) $|\beta| < 3|\alpha|$

γ) $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| - \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < \frac{8}{3}$

δ) αν $3\alpha < \beta$ τότε : $\alpha < 0$

11. α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$ β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$

12. α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ β) Πότε ισχύει η ισότητα ;
13. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,
α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$ β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .
14. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι: α) $A = x - y + 2$ β) $0 < A < 4$
15. Δίνεται η παράσταση: $A = |3x-6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.
α) Να αποδείξετε ότι: i. $A = 3x - 4$ για κάθε $x \geq 2$, ii. $A = 8 - 3x$ για κάθε $x < 2$,
β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x-6| + 2} = 3x + 4$
16. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3| < 1$.
β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $5 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.
γ) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.
17. Για κάθε πραγματικό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$, α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές. β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$
18. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x-3| \leq 2$ και $|y-6| \leq 4$.
α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$. β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .
19. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$ α) Να αποδείξετε ότι: $x \leq \frac{3}{2}$.
β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x .
20. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1| < 1$, τότε: α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$
β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $1, x, x^2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
21. α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: i) $|1-2x| < 5$ και ii) $|1-2x| \geq 1$
β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.
22. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.
α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .
γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό

τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x + 4| + |x - 14| = 18$

23. Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων. i) $|x + 2|$ ii) $|x - 7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x + 2| + |x - 7|$

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

24. Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$, i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

25. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β. β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε, γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

26. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ∈ ℝ ισχύει: • $|\alpha - 2| < 1$ και • $|\beta - 3| \leq 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$ β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β.

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.