

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ - ΠΡΑΞΕΙΣ (ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ)

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Το πολυώνυμο $P(x) = 3(x-1)^2 - 3x^2 + 5$ είναι βαθμού :
 Α. μηδενικού Β. πρώτου Γ. δευτέρου Δ. τρίτου
2. Αν το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 4)x^2 + (\lambda - 2)x - (\lambda + 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι πρώτου βαθμού τότε το λ μπορεί να είναι:
 Α. -2 Β. -1 Γ. 0 Δ. $\sqrt{2}$
3. Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (1 - \lambda)x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda + 8$ είναι σταθερό πολυώνυμο, όταν το λ ισούται με:
 Α. -1 Β. 0 Γ. 1 Δ. για καμία τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$
4. Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^5 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο όταν ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με:
 Α. -1 Β. 0 Γ. 1 Δ. 5
5. Αν το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^v - 1)x^5 + (1 - \lambda)x + 8$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι μηδενικού βαθμού, τότε το πολυώνυμο $q(x) = (\lambda^3 - 1)x^3 - (1 - \lambda^2)x^2 + (\lambda + 1)x - (1 - \lambda)$ είναι:
 Α. τρίτου βαθμού Β. το μηδενικό πολυώνυμο Γ. πρώτου βαθμού Δ. μηδενικού βαθμού
6. Τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - \beta x + 5$ και $Q(x) = x^3 + \beta x^2 + 5 - \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ είναι ίσα όταν ο β ισούται με:
 Α. -1 Β. 0 Γ. 1 Δ. -5
7. Αν τα πολυώνυμα $P(x) = \lambda^{v+1}x^v + (2\lambda - 3)x^2 + x - 1$ και $q(x) = \lambda x^{2023} - 3x^2 + x - (\lambda + 1)$ είναι ίσα, τότε ο πραγματικός αριθμός λ είναι:
 Α. -1 Β. 0 Γ. 2023 Δ. κάθε πραγματικός αριθμός
8. Το πολυώνυμο $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v+1} + \dots + a_0$ έχει για ρίζα το μηδέν. Τότε για το a_0 ισχύει:
 Α. $a_0 > 0$ Β. $a_0 < 0$ Γ. $a_0 = a_v$ Δ. $a_0 = 0$
9. Έστω $P(x)$ σταθερό πολυώνυμο και $P(2) = 5$. Τότε το $P(-2)$ ισούται με:
 Α. 5 Β. -5 Γ. 2 Δ. -2 Ε. 0
10. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει: $(x^2 - 1)P(x) = x^6 - 2x^4 + 5x - 8$, τότε το $P(x)$ είναι βαθμού:
 Α. τρίτου Β. τέταρτου Γ. πέμπτου Δ. έκτου

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το πολυώνυμο: $P(x) = (\lambda + 2)x^3 - (\lambda^2 + \lambda - 2)x + \lambda^2 - 4$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
2. Ναδειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 2)x^2 + (2\lambda + 6)x + \kappa + \lambda - 3$ είναι διάφορο του μηδενικού.
3. Να βρεθεί για ποιες τιμές των κ, λ, μ είναι ίσα τα πολυώνυμα: $P(x) = \lambda x^2 - (\lambda - \kappa)x + \mu - 2\lambda$ και $Q(x) = (\mu - \lambda)x^2 + 4x + \kappa + \lambda$.
4. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x + 27$ να παίρνει τη μορφή $\alpha(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.
5. Να βρεθεί πολυώνυμο $K(x)$ τέτοιο ώστε το τετράγωνό του να ισούται με το: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.
6. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει: $(x^2 + 1)P(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

- Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το -2 , τότε διαιρείται με το διώνυμο:
Α. $x - 2$ Β. $x + 2$ Γ. $2x + 1$ Δ. $2x - 1$ Ε. $2 - x$
- Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και -1 , τότε διαιρείται με τα διώνυμα:
Α. $x - 2$ και $x - 1$ Β. $x + 2$ και $x - 1$ Γ. $x + 2$ και $x + 1$ Δ. $x - 2$ και $x + 1$ Ε. $2x - 1$ και $2x + 1$
- Αν η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το διώνυμο $2x + 1$ είναι τέλεια, τότε το $P(x)$ έχει ρίζα του τον αριθμό:
Α. 2 Β. -2 Γ. 1 Δ. $-\frac{1}{2}$ Ε. $\frac{1}{2}$
- Αν ένα πολυώνυμο πέμπτου βαθμού διαιρείται με ένα τρίτου βαθμού, τότε το πηλίκο είναι:
Α. το πολύ δευτέρου βαθμού Β. τουλάχιστον δευτέρου βαθμού
Γ. ακριβώς δευτέρου βαθμού Δ. ακριβώς τρίτου βαθμού Ε. τουλάχιστον τρίτου βαθμού
- Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων που δεν είναι τέλεια, ο διαιρέτης είναι τρίτου βαθμού, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι:
Α. τουλάχιστον τρίτου βαθμού Β. ακριβώς τρίτου βαθμού Γ. ακριβώς δευτέρου βαθμού
Δ. το πολύ δευτέρου βαθμού Ε. τουλάχιστον δευτέρου βαθμού
- Το πολυώνυμο $P(x) = x^8 + x^4 + x^2 + 3$ το διαιρούμε με το διώνυμο $x - \rho$. Αν είναι u το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης, τότε:
Α. $u > 0$ Β. $u < 0$ Γ. $u = 0$ Δ. $u \leq 0$ Ε. κανένα από τα προηγούμενα
- Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρεθεί με το $x - \rho$ και η διαίρεση είναι τέλεια, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) : \kappa(x - \rho)$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$ είναι:
Α. κ Β. $-\kappa$ Γ. 0 Δ. $-\kappa\rho$ Ε. $\kappa\rho$
- Για ποιο από τα παρακάτω πολυώνυμα μπορείτε με βεβαιότητα και χωρίς δοκιμή να πείτε ότι δεν μπορεί να έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$;
Α. $x^3 - 2x^2 + x - 1$ Β. $4x^5 - 1$ Γ. $2x^4 - x^2 + x - 7$ Δ. $x^6 - x^4 + 2x^2 - 9$ Ε. $x^8 + 2x^6 + 5$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

- Να γίνουν οι διαιρέσεις:
α) $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$ β) $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$
γ) $(3x^3 - 4ax + a^2) : (x - 2a)$ δ) $[7x^3 - (9a + 7a^2)x + 9a^2] : (x - a)$
- Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.
- Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0 .
- Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα a, b .
- Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 13x + \beta$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$.
- Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^2 + 2(\lambda^2 - 3\lambda + 1)x - 3(4\lambda + 1)$. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του λ .
- Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 5$, τότε το πολυώνυμο $P(2x - 3)$ έχει παράγοντα το $x - 4$.
- Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \kappa x^2 + (\lambda - 1)x + 5$ να έχει για παράγοντα το $(x - 1)(x + 2)$.

9. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - (3 + \alpha)x + \beta + 10$ να έχει για παράγοντα το $(x - 2)^2$.
10. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x + 3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 2)(x + 3)$.
11. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x + 2$ αφήνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με $x^2 - 4x + 3$ αφήνει υπόλοιπο $2x + 7$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης: $P(x) : (x + 2)(x^2 - 4x + 3)$.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

- Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις δεν έχει ρίζα ακέραιο αριθμό:
 Α. $x^2 - 5x + 6 = 0$ Β. $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ Γ. $3x^4 - 2x^3 + x - 2 = 0$ Δ. $3x^4 + x^2 + 7 = 0$ Ε. $2x^3 + x + 3 = 0$
- Ποιας συνάρτησης η γραφική παράσταση αποκλείεται να τέμνει τον άξονα $x'x$:
 Α. $f(x) = (x - 2)^2 + 2x - 4$ Β. $g(x) = x^3 - 3x$ Γ. $h(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
 Δ. $k(x) = x^5 - 5x + 4$ Ε. $\Phi(x) = (x + 1)^4 + x^2 + 5$
- Για ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση μπορείτε να πείτε με βεβαιότητα και χωρίς καμιά δοκιμή ότι βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$:
 Α. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ Β. $g(x) = x^2 - 5x$ Γ. $h(x) = (x^3 - 1)^2 + x^4$ Δ. $k(x) = (x - 1)^2 - 2$
 Ε. $\Phi(x) = x^4 + x^2 - 2$
- Η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + \kappa x + 2 = 0$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ αποκλείεται να έχει ακέραια ρίζα τον αριθμό:
 Α. -1 Β. 1 Γ. -2 Δ. 2 Ε. 3
- Αν η εξίσωση $x^3 + \beta x^2 - x + \alpha = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, έχει ρίζα το 3, τότε ο α αποκλείεται να ισούται με:
 Α. 6 Β. 10 Γ. 12 Δ. 15 Ε. 18
- Η εξίσωση $\sqrt{3 - x} = x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$ αποκλείεται να έχει ρίζα τον αριθμό:
 Α. 1 Β. -1 Γ. $\frac{2}{3}$ Δ. 4 Ε. $\frac{5}{4}$
- Για να δεχθούμε το ρ για ρίζα της εξίσωσης $\sqrt{5 - x} = \kappa^2 x$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$ πρέπει:
 Α. $\rho \in (0, +\infty)$ Β. $\rho \in (-\infty, 0)$ Γ. $\rho \in [5, +\infty)$ Δ. $\rho \in (-\infty, 5]$ Ε. $\rho \in [0, 5]$
- Αν η εξίσωση $\sqrt{x - 3} + \sqrt{\kappa - x} = 5$ έχει οπωσδήποτε λύση, ποια τιμή δεν μπορεί να πάρει ο $\kappa \in \mathbb{R}^*$:
 Α. 2 Β. 3 Γ. 4 Δ. 5 Ε. 6

Ερωτήσεις ανάπτυξης

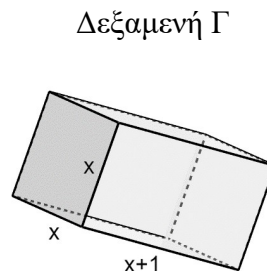
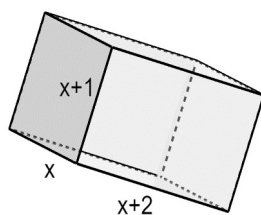
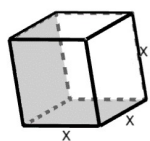
- Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $x^3 - 8x + 7 = 0$ β) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$ γ) $(x^3 - 2x)x + x + 2 = 0$
 δ) $(x - 1)(x^4 + 4) - 3(x + 4) = 0$ ε) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$
- Αν κ ακέραιος αριθμός να δειχθεί ότι η εξίσωση: $5x^{2\kappa} + 9\kappa x - 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
- Αν κ, λ ακέραιοι αριθμοί να δειχθεί ότι η εξίσωση: $8\lambda x^{2\kappa} - 2(\kappa - 1)x + 1 = 0$ δεν έχει ακέραια λύση.
- Να λυθούν οι ανισώσεις: α) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$ β) $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$ γ) $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$
 δ) $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$ ε) $x^4(3x - 4) \geq 10x^2(2x - 1) + 6 - 17x$

5. Δίνεται η εξίσωση $x^5 - ax^3 + bx^2 + x - 1 = 0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a, b ώστε η εξίσωση να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακέραιων ριζών.
6. Να λύσετε τις εξισώσεις:
 α) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ β) $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$ γ) $(x + 2)^8 - 3(x + 2)^4 - 4 = 0$
 δ) $(x^3 - 11x + 12)^4 - 3(x^3 - 11x + 12)^2 - 4 = 0$ ε) $(\frac{x-1}{x})^2 - 5(\frac{x-1}{x}) + 6 = 0$
7. Δίνεται η εξίσωση $x^5 + x^4 + kx + \lambda = 0$. Να προσδιοριστούν οι k, λ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το -1 με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα). Μετά να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.
8. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 - 12x + 1 = 0$ έχει τρεις διαφορετικές ρίζες, ακριβώς μία σε καθένα από τα διαστήματα: $(-4, -3)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$.
9. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $\frac{x}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{x^2-1}$ β) $\frac{x^2+2x-4}{x-2} = x^2$
10. Να λυθούν οι ανισώσεις: α) $\frac{x^3+2x-4}{x-2} < 1$ β) $\frac{x^2}{x+1} - \frac{4}{x-1} \leq \frac{2}{x^2-1}$
11. Να λυθούν οι εξισώσεις:
 α) $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$ β) $2\eta\mu^3 x + 5\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x + 2 = 0$ γ) $2\sigma\upsilon\nu^4 x - 5\sigma\upsilon\nu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$
12. Να λυθούν οι εξισώσεις:
 α) $x + \sqrt{5x+10} = 8$ β) $\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x+1}$ γ) $\sqrt{x-8} = 2+x$ δ)
 $\sqrt{x} + \sqrt{x+32} = 16$ ε) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$
13. Να λυθούν οι εξισώσεις:
 α) $\sqrt{x-1} - 1 = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ β) $\frac{4-\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}$ γ) $\sqrt{2-x} + \frac{4}{3+\sqrt{2-x}} = 2$
 δ) $\sqrt{-x-1} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^3-x}}$ ε) $\sqrt{2x^2-7x+4} = \sqrt{x^2+3x-5}$
14. Να λυθεί η εξίσωση: $x + \sqrt{x^2 - x} + \lambda^2 + 1 = \lambda$.
15. Να λυθούν οι ανισώσεις:
 α) $\sqrt{3x+7} < \sqrt{x+3}$ β) $x-1 \geq \sqrt{x+5}$ γ) $\sqrt{x^2+x+3} \geq x + \frac{1}{2}$
16. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$ β) $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$

Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων

- 1) α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x + 2$ i) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.
 ii) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x+1)$.
 β) Αν $P(x) = (x+1)(x^2-x+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$
- 2) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$ α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$
 β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων

- 3) Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. β) Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ που προκύπτει από την διαίρεση $P(x) : (x-2)$;
- 4) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$. α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$. β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο. γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
- 5) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. α) Να βρείτε τις τιμές των α, β αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$. β) Για $\alpha = 4, \beta = -2$ i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. ii. Αν $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x+2)$
- 6) Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ (1) α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1) β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $\alpha = 0$
 γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$ είναι άρτια
 δ) Να αποδείξετε ότι: i) Για $\alpha = 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα. ii) Για $\alpha \neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$ τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.
- 7) Μία κυβική δεξαμενή A έχει ακμή με μήκος x μέτρα. Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή B σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση. α) Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x . β) Αν ο όγκος της δεξαμενής B είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:
 i) Τις διαστάσεις των δεξαμενών A και B ii) Τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.
 γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής B κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα
 Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών A, B και Γ



- 8) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.
 α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0$.
- 9) α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
 i) Να δείξετε ότι $\sqrt{x^2+1} - x > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
 β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
 i) Να αποδείξετε ότι $g(-x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

- 10) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + bx^2 - bx + 3$, $a, b \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε: **α)** Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε: **β)** Να αποδείξετε ότι $a = -3$ και $b = \frac{21}{2}$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$. **δ)** Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$

- 11) Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο Β επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο Α επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

α) Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $a = 2$, μετά ο Β επιλέγει $b = 1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c = 2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2 .

β) Ο μαθητής Α επιλέγει $a = -1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - 1$.

γ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 1$. Να δείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

δ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13.

- 12) Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε: $x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1)(x^2 + \beta x + 1)$

γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαραδείγμα.

- 13) Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η παραβολή $y = 3 - x^2$ και τα σημεία της Γ, Δ . Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha \in (0, \sqrt{3})$.

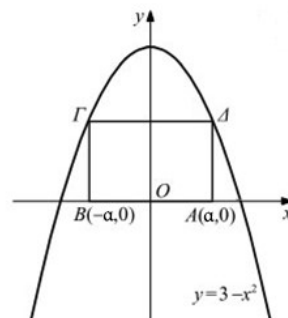
α) Αν E είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

i) να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι $E = f(\alpha) = -2\alpha^3 + 6\alpha$ τετρ.

μον. **ii)** να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha = 1$

β) Να δείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετρ. μον.

γ) Να βρεθεί η θέση του α , ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του.



- 14) Δίνονται οι συναρτήσεις: $\phi(x) = \sqrt{x}$ με $x \geq 0$,

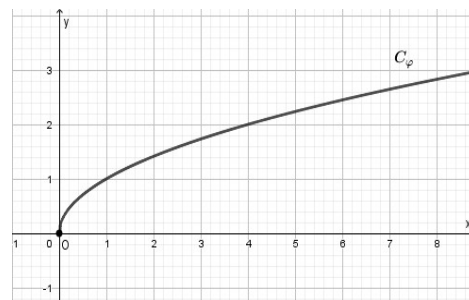
$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ με } x \geq 1, \text{ και } g(x) = \frac{x+1}{3} \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . **β)** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης ϕ .

i) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ϕ , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f

συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g **γ)** Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f

βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g . **δ)** Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1 + \ln 10}{3}$.



ii) Στο ίδιο σύστημα

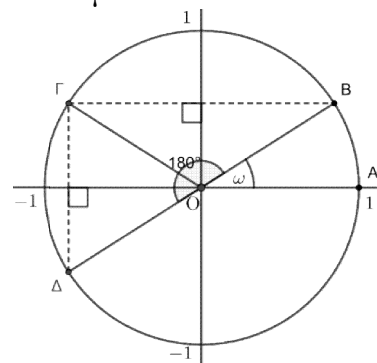
- 15) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + ax - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $u(x) = 24x - 24$.
α) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού a ,
β) Για $a = 2$, **i)** να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$ **ii)** να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.
iii) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

- 16) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 60 \text{ cm}^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:
α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $x^3 + x^2 - 3600 = 0$.
β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.
γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- 17) Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0 \quad \alpha) \text{ Να δείξετε ότι } \eta\mu\omega = \frac{3}{5}$$

- β)** Να βρείτε: **i)** την τιμή του συνω
ii) τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ
iii) το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOG}$ και $\widehat{AOD}$.



- 18) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + ax + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.
α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$. **β)** Να βρείτε τις τιμές των a και β .
γ) Έστω $a = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:
i) να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ **ii)** να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

- 19) Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$. **α)** Να αποδείξετε ότι:

- i)** Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του. **ii)** Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.
β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. **δ)** Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

- 20) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^2$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ και το σημείο

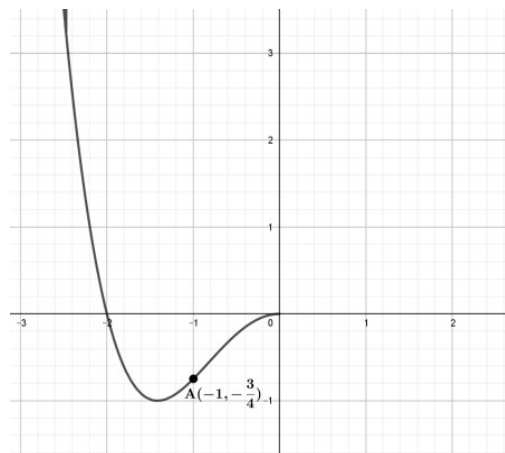
$$A\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \text{ αυτής} \quad \alpha) \text{ Να δείξετε ότι } a = -1. \quad \beta) \text{ Για } a = -1,$$

- i.** Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$. **γ)** Αφού

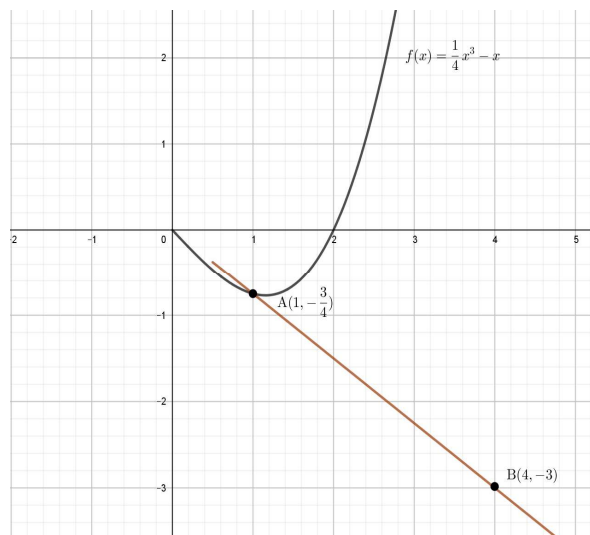
επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με

όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας

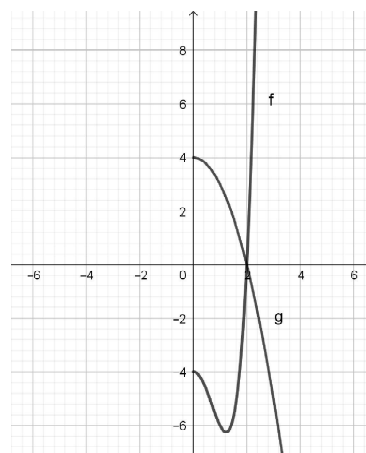
$y = -\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f .



- 21) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ και $B(4, -3)$.

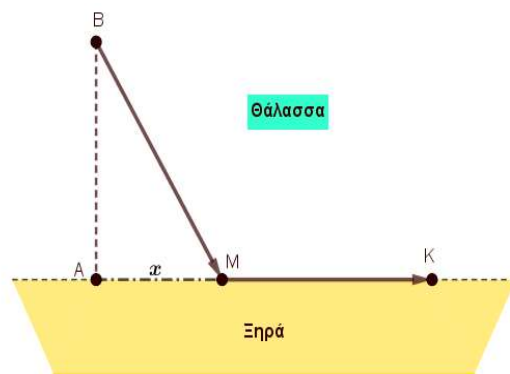


- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.
 β) i. Να δείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.
 γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .
- 22) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
 α) Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:
 i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
 ii. την ανίσωση $f(x) < g(x)$.



- 23) Η μέση θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.
 α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν $^{\circ}\text{C}$.
 β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει $T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.
 γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία T είναι συνεχώς κάτω από μηδέν $^{\circ}\text{C}$. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

- 24) Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση 2km από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει 4km από το A. Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3km/h και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5km/h. Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t , είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$. Αν το σημείο M απέχει



- από το A απόσταση x km, τότε:
 α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.
 β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η: $t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}$, $x \in [0, 4]$.
 γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

25) α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

i) Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του

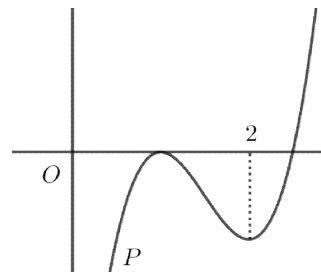
$$\text{με } (x-2) \text{ είναι } -1, \text{ να δείξετε ότι: } \begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \text{ και}$$

ii) Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.



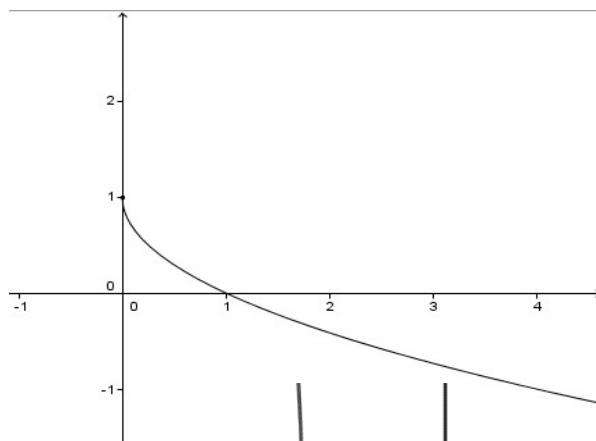
26) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το πρόσημο

του γινομένου $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1)$

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.

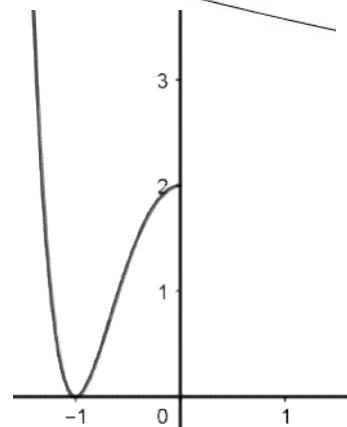


27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

α) Να δείξετε ότι f είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να συμπληρώσετε στο παρακάτω σχήμα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$. δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.



28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + kx - 1$, με $k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Για $k = 0$, i) να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, ii) να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

iii) να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

29) Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

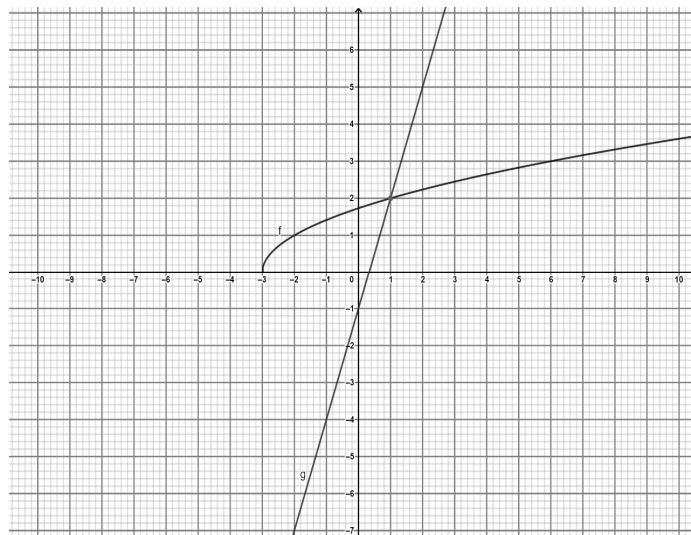
$$f(x) = \sqrt{x+3} \text{ και } g(x) = 3x - 1.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f , g .

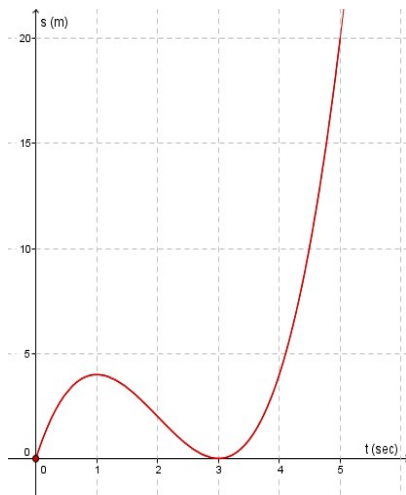
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του

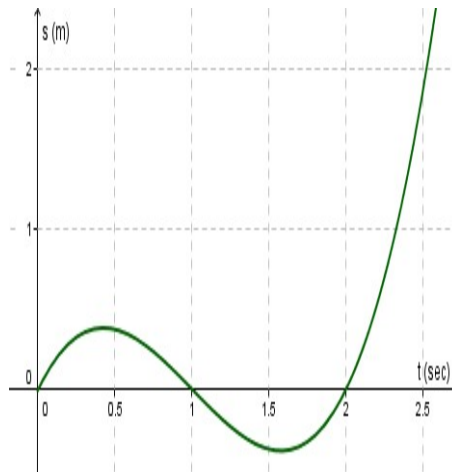
α ερωτήματος.



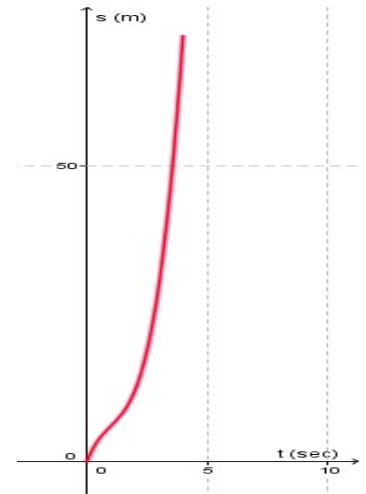
- 30) Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$
- α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t=0$ και $t=2$.
- β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.
- γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.
- δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας



(I)



(II)



(III)