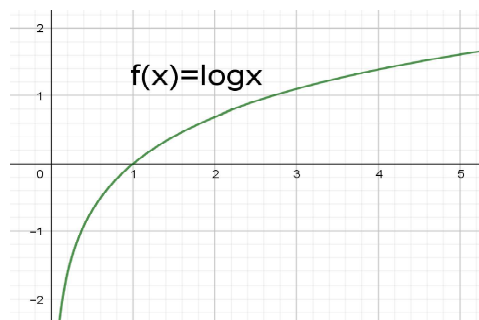


ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό - Λάθος”

- | | | |
|---|---|---|
| 1. Αν $0 < a \neq 1$ και $\theta > 0$ ισχύει η ισοδυναμία. $\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta$. | Σ | Λ |
| 2. Αν $0 < a \neq 1$ ισχύει ότι $\log_a a^x = x$ | Σ | Λ |
| 3. Αν $0 < a \neq 1$ ισχύει ότι $a^{\log_a \theta} = \theta$ | Σ | Λ |
| 4. Αν $0 < a \neq 1$ ισχύει ότι $\log_a 1 = 1$ | Σ | Λ |
| 5. Αν $0 < a \neq 1$ ισχύει ότι $\log_a a = 1$ | Σ | Λ |
| 6. Αν $\theta > 0$ ισχύει ότι $\log(10\theta) = 1 + \log \theta$ | Σ | Λ |
| 7. Αν $\theta > 0$ και $\theta \neq 10$ ισχύει ότι $\log\left(\frac{\theta}{10}\right) = 1 - \log \theta$ | Σ | Λ |
| 8. Αν $\theta > 0$ και $\theta \neq 10$ ισχύει ότι $\log \theta^{10} = \theta$ | Σ | Λ |

9. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log x$
Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

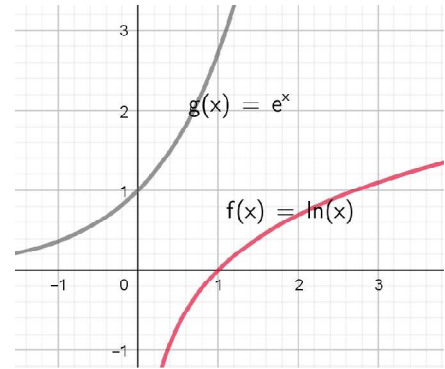


- | | | |
|---|---|---|
| i) Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$. | Σ | Λ |
| ii) Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ | Σ | Λ |
| iii) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ | Σ | Λ |
| iv) Η f έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$. | Σ | Λ |
| v) Η f έχει ασύμπτωτη του αρνητικού ημιάξονα των $y'y$ | Σ | Λ |
| vi) Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x) = 10^x$ ως προς την ευθεία $y = x$. | Σ | Λ |
| vii) Ισχύει ότι $f(2) < f(3)$ | Σ | Λ |
| viii) Το σημείο $(1, 0)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f . | Σ | Λ |
| ix) Το σημείο $(0, 1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f . | Σ | Λ |
| x) Το σημείο $(10, 1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f . | Σ | Λ |

- | | | |
|--|---|---|
| 10. i) Αν $x < y$ τότε $\log x < \log y$ | Σ | Λ |
| ii) Αν $x < y$ τότε $\ln x > \ln y$ | Σ | Λ |

11. Στο σχήμα 18 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$.

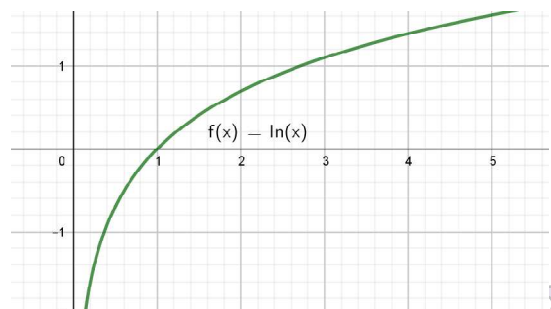
Να χαρακτηρίσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

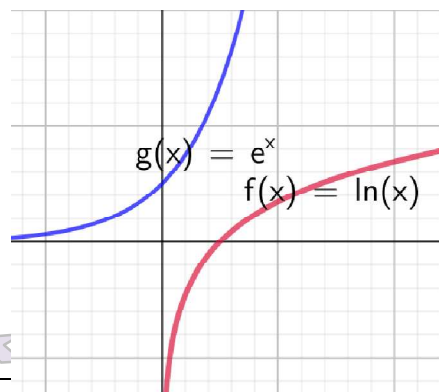
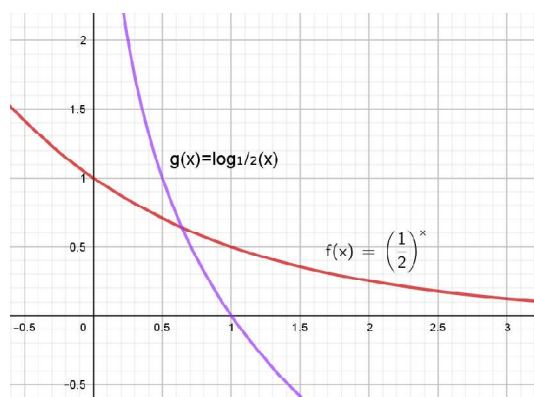
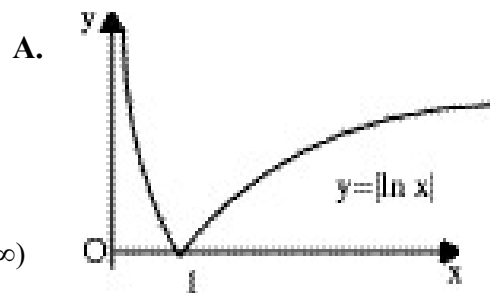


- | | | |
|--|---|---|
| i) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g είναι συμμετρικές ως την ευθεία $y = x$. | Σ | Λ |
| ii) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν τέμνονται. | Σ | Λ |
| iii) Οι γραφική παράσταση της f τέμνει τον x' στο $(1, 0)$. | Σ | Λ |
| iv) Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον $y'y$ στο $(0, 1)$. | Σ | Λ |
| v) Ισχύει ότι $f(2) < g(2)$ | Σ | Λ |
| vi) Ισχύει ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right)$ | Σ | Λ |
| vii) Η f και η g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις στα πεδία ορισμού τους. | Σ | Λ |

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

- Το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_a x$ με $0 < a \neq 1$ είναι
 Α. Το $[0, +\infty)$ Β. Το $\mathbb{R}$ Γ. Το $(0, +\infty)$ Δ. Το $\mathbb{R}^*$ Ε. Το $\mathbb{R} - \{1\}$
- Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \ln x$ είναι
 Α. το $[0, +\infty)$ Β. το $(-\infty, 0)$ Γ. το $(0, +\infty)$ Δ. το $(-\infty, 0)$ Ε. το σύνολο $\mathbb{R}$
- Το σύνολο τιμών της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_a x$ με $0 < a \neq 1$ είναι το
 Α. $[0, +\infty)$ Β. $\mathbb{R}$ Γ. $(0, +\infty)$ Δ. $(-\infty, 0)$ Ε. $(-\infty, 0]$
- Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο $f(x) = \ln x$ τέμνει
 Α. μόνο τον άξονα $y'y$
 Β. τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$
 Γ. μόνο τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1, 0)$
 Δ. τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία
 Ε. τίποτα από τα προηγούμενα





13. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = a^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \log_a x$ όταν $0 < a \neq 1$ ως προς
Α. τον άξονα $y'y$ Β. την ευθεία $y = x$ Γ. το $O(0,0)$ Δ. την ευθεία $y = -x$ Ε. τον άξονα $x'x$
14. Η ισοδυναμία $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$ ισχύει πάντοτε με τις προϋποθέσεις
Α. $x \in \mathbb{R}$ και $a > 0$ Β. $x \in [0, +\infty)$ και $0 \leq a \neq 1$ Γ. $x \in (0, +\infty)$ και $0 < a \neq 1$
Δ. $x \in \mathbb{R}$ και $a \neq 1$ Ε. $x \geq 0$ και $a \geq 0$
15. Αν $\log_x 32 = 5$ τότε το x είναι ίσο με
Α. $\frac{1}{2}$ Β. 2 Γ. -2 Δ. 1 Ε. 10
16. Αν $\log_3 x = 4$ τότε το x είναι ίσο με
Α. 7 Β. 12 Γ. 64 Δ. 81 Ε. 9
17. Αν $\log_2 64 = x$ τότε το x είναι ίσο με
Α. 32 Β. 16 Γ. 128 Δ. 12 Ε. 6
18. Η παράσταση $3^{\log_3 5}$ είναι ίση με
Α. 1 Β. $\log 5$ Γ. 5 Δ. $\log 3$ Ε. 0
19. Η παράσταση $\log_a a$ με $0 < a \neq 1$ είναι ίση με
Α. a^2 Β. 1 Γ. a Δ. 0 Ε. $2a$
20. Η παράσταση $\log_a 1$ με $0 < a \neq 1$ είναι ίση με
Α. a^2 Β. 1 Γ. a Δ. 0 Ε. $2a$
21. Η παράσταση $\log 100^2$ είναι ίση με
Α. 4 Β. 2 Γ. 10 Δ. 100 Ε. 10.000
22. Η παράσταση $\log 2 + \log 7$ είναι ίση με
Α. $\log 9$ Β. $\log 14$ Γ. $\log \frac{7}{2}$ Δ. $\log 5$ Ε. $2\log 7$
23. Η παράσταση $\log 12 - \log 3$ είναι ίση με
Α. $\log 9$ Β. $\log 15$ Γ. $\log 36$ Δ. $12\log 3$ Ε. $\log 4$
24. Η παράσταση $\log 2^3$ είναι ίση με
Α. $\log 6$ Β. $\log 5$ Γ. $2\log 3$ Δ. $3\log 2$ Ε. τίποτα από τα προηγούμενα
25. Η παράσταση $\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8$ είναι ίση με
Α. $\frac{1}{6}$ Β. $\frac{1}{6}\log 200$ Γ. $\frac{5}{6}\log 34$ Δ. 1 Ε. $\log 200$
26. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η
Α. $\log_5 2 < \log_5 \frac{1}{2}$ Β. $\log_5 2 \leq \log_5 \frac{1}{2}$ Γ. $\log_5 2 > \log_5 \frac{1}{2}$ Δ. $\log_5 2 = \log_5 \frac{1}{2}$

27. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η

A. $\log_{\frac{1}{3}} 5 < \log_{\frac{1}{3}} 7$ B. $\log_{\frac{1}{3}} 5 \leq \log_{\frac{1}{3}} 7$ Γ. $\log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_{\frac{1}{3}} 7$ Δ. $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{3}} 7$

28. Ο $\log(4-x^2)$ ορίζεται αν

A. $x > 2$ B. $-2 < x < 2$ Γ. $x < -2$ Δ. $x = 2$ E. $x = -2$

29. Ο $\log|x-1|$ δεν ορίζεται αν

A. $x > 1$ B. $x \neq 1$ Γ. $-1 < x < 1$ Δ. $x < -1$ E. $x = 1$

30. Η συνάρτηση $f(x) = \log(x-6) + \log(7-x)$ ορίζεται αν

A. $x = 6$ B. $x < 6$ Γ. $x > 7$ Δ. $x = 7$ E. $6 < x < 7$

31. Αν $\log[\log(x-2)] = 0$ τότε το x είναι ίσο με

A. 12 B. 2 Γ. 3 Δ. 4 E. 10

32. Αν $\log\theta = 1,62$ τότε ο θ ανήκει στο διάστημα

A. (0,1) B. (1,2) Γ. (2,5) Δ. (5,10) E. (10,100)

33. Αν ισχύει $\log(\eta\mu x) = 0$ τότε είναι

A. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ B. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ Γ. $x = 2k\pi$ Δ. $x = 2k\pi + \pi$ E. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

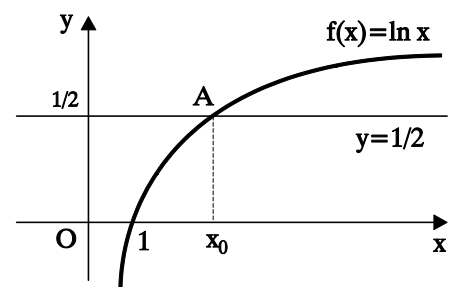
34. Αν ισχύει $\log(\epsilon\phi x) = 0$ τότε είναι

A. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ B. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ Γ. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ Δ. $x = k\pi$ E. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$

35. Αν $\log 50 - \log 2 = \log x$ τότε το x είναι ίσο με A. 100 B. 52 Γ. 25 Δ. 48
E. 12,5

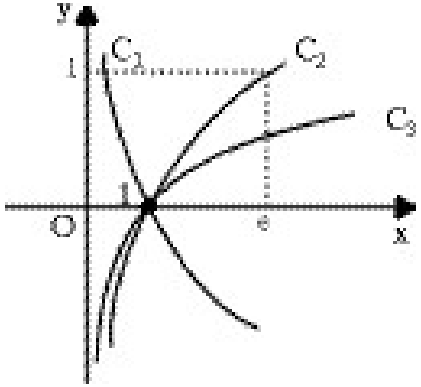
36. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους $f(x) = \ln x$ και $y = \frac{1}{2}$ τέμνονται στο σημείο $A(x_0, \frac{1}{2})$ (Σχ.14). Τότε το x_0 είναι ίσο με

A. e B. 1 Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. $\sqrt{e}$ E. $\frac{3}{2}$



Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στη στήλη Α του πίνακα με τον τύπο τους που αναγράφεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
	$f_1(x) = \log x$ $f_2(x) = \ln x$ $f_3(x) = \log_2 x + 1$ $f_4(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ $f_5(x) = \log_{\frac{1}{4}} x - 1$

2. Να αντιστοιχίσετε κάθε ισότητα της στήλης Α του πίνακα με την ισοδύναμή της ισότητα της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
$\log_a 3 = 8$ $\log_8 a = 3$ $\ln x = 1 + \omega$ $\omega \ln x = 1$	A. $a^8 = 3$ B. $\omega = e^x$ Γ. $x^\omega = e$ Δ. $a = 8^3$ E. $x = e^{\omega+1}$ ΣΤ. $a = 3^8$

3. Να αντιστοιχίσετε τα αναπτύγματα που υπάρχουν στη στήλη Β με την ισοδύναμη τους στη στήλη Α.

Στήλη Α	Στήλη Β
$\log\left(\frac{x^2}{y^3}\right)$ $\ln(xy^2)$ $\ln(10xy)$	A. $3\log x - 2\log y$ B. $\ln x + 2\ln y$ Γ. $2\log x - 3\log y$ Δ. $\ln 10 + \ln x + \ln y$ E. $1 + \ln x + \ln y$

4. Να αντιστοιχήσετε τα αναπτύγματα που υπάρχουν στη στήλη Α του πίνακα με την ισοδύναμη παράστασή τους στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\log 4 - \log x + 2\log y$	Α. $\log\left(\frac{4y^2}{x}\right)$ Β. $\ln\left(\frac{xe^2}{y^2}\right)$
2. $\log \alpha + 2\log \beta - \log \gamma$	Γ. $\ln\left(\frac{2x}{y^2}\right)$ Δ. $\ln[(x+e)(e-x)]$
3. $\ln x - 2\ln y + 2$	Ε. $\log\left(\frac{\alpha\beta^2}{\gamma}\right)$

Ερωτήσεις διάταξης

Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

1. $A = \log 0,5$ $B = \log \sqrt{2}$ $\Gamma = \log \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Delta = 0$ $E = 1$

2. $A = \log_2 \frac{1}{2}$ $B = \log_2 \frac{1}{3}$ $\Gamma = \log_2 \sqrt{5}$ $\Delta = 0$ $E = 1$

3. $A = \log_{0,5} \frac{1}{4}$ $B = \log_{0,5} 4$ $\Gamma = \log_{0,5} 10$ $\Delta = 0$ $E = 1$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις ισότητες που ακολουθούν:

i) $\log_5 \dots = 2$ ii) $\log_5 25 = \dots$ iii) $\log_2 \dots = -3$ iv) $\log_{\frac{1}{2}} \dots = -3$

v) $\log_5 \sqrt{5} = \dots$ vi) $\log_a (\alpha^p) = \dots, p \in \mathbb{R}$ vii) $\log_6 \frac{1}{6} = \dots$ viii) $\log_6 \dots = 2$

2. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $\log_a 1 = \dots$ ii) $\log_a a = \dots$ iii) $\log_a \sqrt{a} = \dots$ iv) $\log_{\dots} a = 1$ v) $\log_a \frac{1}{a} = \dots$

vi) $\log_{\dots} \sqrt{k} = \frac{1}{2}$ vii) $\log_a \dots = \frac{1}{3}$ viii) $\log_{\dots} a^2 = 1$ ix) $\log_{\dots} a^3 = 3$ x) $\log_a \dots = 0$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(1+x) = \log(1-x)$

ii) $\log(1+x) = 1 + \log(1-x)$

iii) $2\log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

iv) $\ln \frac{x}{2} = \frac{\ln x}{2}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x(\log 10 - \log 5) = \log(4^x - 12)$

ii) $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$

iii) $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x} = 1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

ii) $\log_2(\log_2 x) = \log_4(\log_4 x)$

iii) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$

4. i) Να αποδείξετε ότι: $X^{\log_5 2} = 2^{\log_5 x}$ αν $0 < x \neq 1$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $3x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει γενικά $a^{\log_\beta \gamma} = \gamma^{\log_\beta a}$ με $(0 < a, \beta, \gamma \neq 1)$

5. i) Να αποδείξετε ότι $X^{\log y} = y^{\log x}$ με $x, y > 0$

ii) Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases}$$

iii) Αν οι λύσεις του (ii) είναι ρίζες της εξίσωσης: $\log[\log(x^2 + x \log \theta - 110)] = 0$ να βρείτε το $\theta \in \mathbb{R}_+^*$

6. Να λύσετε την εξίσωση: $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$.

7. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(\sin x) = 0$.

8. Έστω $Q(t)$ η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\ln Q(t) = at + \beta$, $t \geq 0$ όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$, τότε:

α. να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$, $t \geq 0$

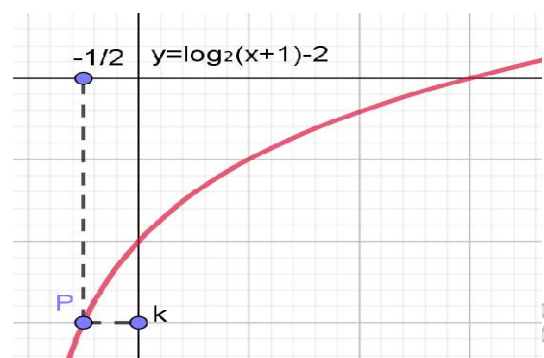
β. να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με $1/16$ της αρχικής του τιμής,

γ. να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $1/9$ της αρχικής του τιμής.

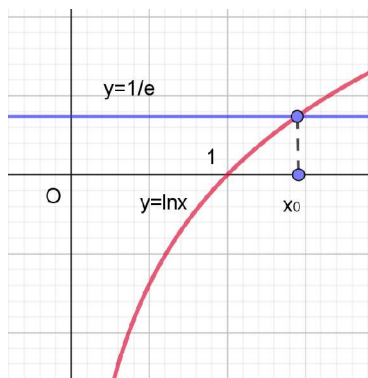
9. Να βρείτε:

α) τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της $f(x) = \log_2(x+1) - 2$.

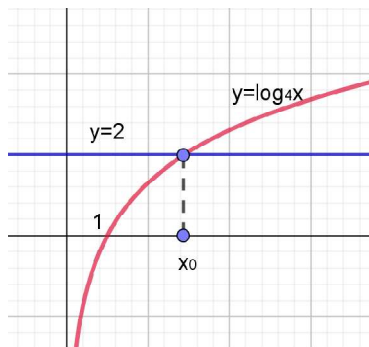
β) Το k ώστε το σημείο $P\left(-\frac{1}{2}, k\right)$ να ανήκει στη γραφική της παράσταση.



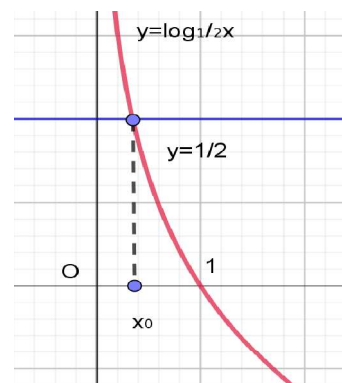
10. Να βρείτε το x_0 σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:



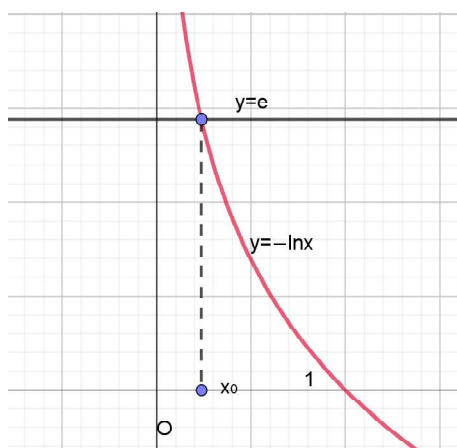
i)



ii)



iii)



iv)

11. Ο θόρυβος L σε dB (ντεσιμπέλ) που προκαλεί μια ηχητική πηγή δίνεται από τον τύπο $L = 120 + 10 \log (10^{-12} I)$ όπου I το μέτρο της έντασης του ήχου σε Watt/m^2 .

α) Πόση πρέπει να είναι (το πολύ) η ένταση μια «αθόρυβης» ηλεκτρικής συσκευής;

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Είδος θορύβου	Θόρυβος σε dB	Ένταση ήχου σε Watt/m^2
Μηχανές αεροπλάνου Jet (σε απόσταση 30m)	140	
Μουσική Rock (1,5m μακριά από το ηχείο)		10^{12}
Μοτοσυκλέτα (με κανονική εξάτμιση)	80	
Συνομιλία (σε ήρεμο κλίμα)		10^6

γ) Σ' ένα πεζοδρόμιο δουλεύουν ταυτόχρονα σε πολύ μικρή απόσταση 2 κομπρεσέρ που το καθένα ξεχωριστά προκαλεί θόρυβο 130 dB. Πόσος είναι ο συνολικός θόρυβος που προκαλεί και τα δύο μαζί;
Δίνονται: i) Μια ηχητική πηγή θεωρείται αθόρυβη όταν ο θόρυβος της είναι 20dB (όσος δηλαδή είναι ο θόρυβος του θροίσματος των φύλλων του δένδρου σε ελαφρό φύσημα του αέρα - μικρότερος θόρυβος δεν ανιχνεύεται-). ii) $\log 2 \cong 0,30$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$. α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή. γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x+1) = 0$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$. α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x).

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$. γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης A και να

αποδείξετε ότι διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \ln 2$

iii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(-x) = \ln\left(\frac{1}{4} - e^{2x}\right)$

15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(2 - \sqrt{x})$ και $g(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$ i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των

συναρτήσεων f και g και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(3) + \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln 8 - 2 \cdot f(0) = \ln 2$

ii) Να βρείτε για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln x$. i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) \leq 5 - x$

iv) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq \ln 2$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Να βρείτε τα α, β ώστε $f(\alpha) + f(\beta) = 2\ln 2$