

## Βασικές έννοιες στη μελέτη των συναρτήσεων Μεθοδολογία

### ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο  $A$  σε ένα σύνολο  $B$  λέγεται μια διαδικασία (κανόνας), με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου  $A$  αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου  $B$ .

Το σύνολο  $A$  λέγεται **πεδίο ορισμού της συνάρτησης** και περιέχει τις δυνατές τιμές που μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή  $x$ . (το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης  $f$  το συμβολίζουμε συνήθως  $D_f$  ή  $A$ ).

Το σύνολο που περιέχει όλες τις τιμές της  $f(x)$  για τα αντίστοιχα  $x \in A$ , λέγεται **σύνολο τιμών της  $f$**  και συμβολίζεται με  $f(A)$ .

### ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

| ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ                  | ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ   |
|----------------------------|---------------|
| $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ | $Q(x) \neq 0$ |
| $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$    | $P(x) \geq 0$ |

☀️ Λαμβάνουμε επίσης υπόψη τους φυσικούς/λογικούς περιορισμούς ενός προβλήματος π.χ. ο χρόνος είναι  $t \geq 0$

### ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  (συμβ.  $C_f$ ) ισχύουν τα παρακάτω :

- Για όλα τα σημεία  $M(x, y)$  που ανήκουν στη  $C_f$  ισχύει  $y = f(x)$ . Δηλ.  $M(x, f(x))$ . Πιο συγκεκριμένα το σημείο  $M(x_0, y_0)$  ανήκει στη  $C_f$ , αν και μόνο αν  $f(x_0) = y_0$
- Η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τον  $x'x \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Η  $C_f$  βρίσκεται κάτω από τον  $x'x \Leftrightarrow f(x) < 0$
- Η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τη  $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Η  $C_f$  βρίσκεται κάτω από τη  $C_g \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
- ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ
  - ❖ Η  $C_f$  τέμνει τον  $x'x$  σε σημεία της της μορφής  $M(x_0, 0)$ , οπότε για να τα βρούμε λύνουμε την εξίσωση  $y = f(x) = 0$
  - ❖ Η  $C_f$  τέμνει τον  $y'y$  σε σημεία της της μορφής  $M(0, y_0)$ , οπότε για να τα βρούμε, βάζουμε όπου  $x$  το 0 δηλ. υπολογίζουμε το  $f(0)$
- Για να βρούμε κοινά σημεία  $C_f$  και  $C_g$  λύνουμε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

## 2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

### Μονοτονία συνάρτησης

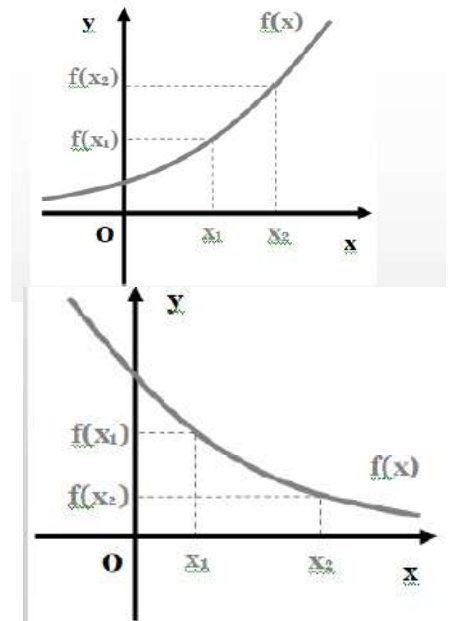


Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της

#### συνάρτησης

Προβάλλουμε τα τμήματα της καμπύλης που κατέρχονται (φθίνει) από αριστερά προς τα δεξιά, στον άξονα  $x'$  και βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Αντίστοιχα προβάλλουμε τα τμήματα της καμπύλης τα οποία ανέρχονται (αυξάνει) στον άξονα  $x'$  και βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.



Γνωρίζοντας το τύπο της συνάρτησης

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης  $f$  και  $\Delta$  διάστημα του πεδίου ορισμού της. Θεωρούμε  $x_1, x_2$  με  $x_1 < x_2$ , όπου  $x_1, x_2 \in \Delta$ . Στη συνέχεια προσπαθούμε με κατάλληλες πράξεις να σχηματίσουμε τα  $f(x_1)$  και  $f(x_2)$ .

Αν  $f(x_1) < f(x_2)$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\uparrow$  στο  $\Delta$ , ενώ αν  $f(x_1) > f(x_2)$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα  $\downarrow$  στο  $\Delta$ .

### Εφαρμογές της μονοτονίας στην επίλυση εξισώσεων :

- ◆ Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη, τότε η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'$  το πολύ μια φορά.

Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$ , αλλά και κάθε εξίσωση της μορφής  $f(x) = \alpha$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$ , έχει το πολύ μια ρίζα.

Για να επιλύσουμε μια εξίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

- 1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1<sup>ο</sup> μέλος
- 2) θέτουμε το 1<sup>ο</sup> μέλος ως συνάρτηση  $f(x)$  οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή  $f(x) = 0$
- 3) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης  $f(x) = 0$
- 4) αποδεικνύουμε ότι η είναι γνησίως μονότονη, οπότε η (προφανής) ρίζα που βρήκαμε είναι μοναδική.

### Εφαρμογές της μονοτονίας στην επίλυση ανισώσεων :

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

- 1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1<sup>ο</sup> μέλος
- 2) θέτουμε το 1<sup>ο</sup> μέλος ως συνάρτηση  $f(x)$  οπότε η ανίσωση έχει τη μορφή  $f(x) > 0$  ή  $f(x) < 0$

- 3) αποδεικνύουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη  
 4) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης  $f(x) = 0$  έτσι η ανίσωση γίνεται  $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(\rho)$  ή  $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(\rho)$   
 5) εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της  $f$  για να λύσουμε την ανίσωση που προέκυψε.

**ΠΡΟΣΟΧΗ:**

- Αν η είναι γνησίως αύξουσα τότε :  $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$  και  $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$   
 ➤ Αν η είναι γνησίως φθίνουσα τότε :  $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta)$  και  $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow f(\alpha) \geq f(\beta)$

**Ακρότατα συνάρτησης****➤ Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης**

Βρίσκουμε (αν υπάρχει) το κατώτερο σημείο  $(x_0, f(x_0))$  της  $C_f$ . Τότε η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0$  το  $f(x_0)$ .

Αντίστοιχα βρίσκουμε (αν υπάρχει) το ανώτερο σημείο  $(x_1, f(x_1))$  της  $C_f$ . Τότε η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο στο  $x_1$  το  $f(x_1)$ .

**➤ Γνωρίζοντας το τύπο της συνάρτησης**

Αρχικά προσπαθούμε να μετατρέψουμε (αν χρειάζεται) το τύπο της συνάρτησης στη μορφή ώστε  $f(x) \geq f(x_0)$  ή  $f(x) \leq f(x_1)$

**Άρτια - Περιττή συνάρτηση****Γνωρίζοντας το τύπο της συνάρτησης**

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης  $f$ .

- Ελέγχουμε αν αυτό είναι συμμετρικό γύρω από το 0, δηλαδή αν γιατί για κάθε  $x \in A$  τότε και  $-x \in A$ .
- Στη συνέχεια βρίσκουμε το  $f(-x)$ , αντικαθιστώντας στην  $f$  όπου  $x$  το  $-x$ .

Αν  $f(-x) = f(x)$ , τότε η  $f$  είναι άρτια ενώ αν  $f(-x) = -f(x)$ , τότε η  $f$  είναι περιττή.

Αν όμως δεν μπορούμε να καταλήξουμε στα προηγούμενα, τότε θεωρούμε δύο αντίθετες τιμές για το  $x$  που ανήκουν στο  $A$  και αποδεικνύουμε ότι  $f(-x) \neq f(x)$  και  $f(-x) \neq -f(x)$ , οπότε η  $f$  δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

**Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης**

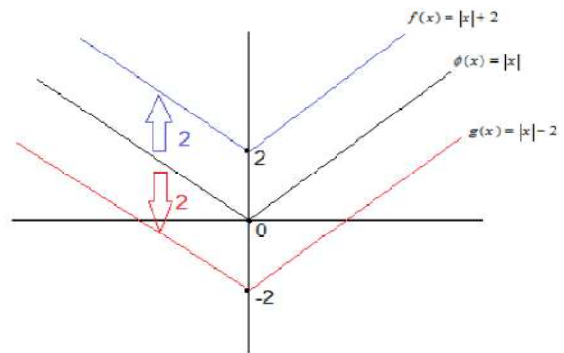
- ◆ Διπλώνουμε το σχήμα κατά μήκος του άξονα  $y'y$ . Αν τα τμήματα της καμπύλης συμπίσουν τότε η συνάρτηση είναι **άρτια**.
- ◆ Περιστρέφουμε το σχήμα κατά  $180^\circ$ , αν το νέο σχήμα που θα προκύψει είναι ίδιο με το αρχικό τότε η συνάρτηση είναι **περιττή**.

## 2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

### Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

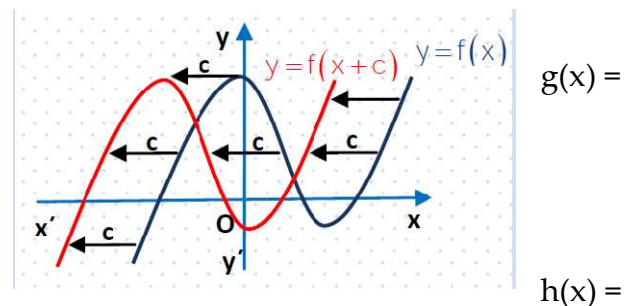
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x) + c$ ,  $c > 0$  προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $f$  κατά  $c$  μονάδες προς τα πάνω και

η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h(x) = f(x) - c$ ,  $c > 0$  προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $f$  κατά  $c$  μονάδες προς τα κάτω.



### Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x+c)$ ,  $c > 0$ , προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  κατά  $c$  μονάδες προς τα αριστερά.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x-c)$ ,  $c > 0$ , προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  κατά  $c$  μονάδες προς τα δεξιά.



**Σημείωση:** Για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x \pm c_1) \pm c_2$ , χρησιμοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση.

