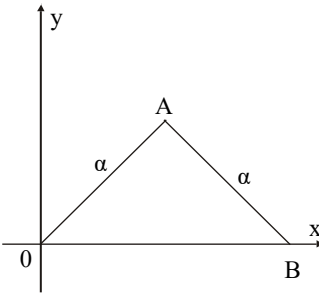


Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$. Σ Λ
2. Οι ευθείες $y = 2$ και $y = 2x$ είναι παράλληλες. Σ Λ
3. Όταν ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας δεν ορίζεται, τότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $x = x_0$. Σ Λ
4. Στην ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης. Ισχύει $B = 0$. Σ Λ
5. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$. Σ Λ
6. Η απόσταση $d(M_0, \varepsilon)$ του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$ επαληθεύει την ισότητα $|Ax_0 + By_0 + \Gamma| = d(M_0, \varepsilon) \sqrt{A^2 + B^2}$. Σ Λ
7. Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με την ορίζουσα $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$. Σ Λ
8. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 2x + 1$, $\varepsilon_2: y = 2x - 1$, $\varepsilon_3: x + 2y + 1 = 0$ και $\varepsilon_4: x + 2y + 2 = 0$ τεμνόμενες ορίζουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σ Λ
9. Η εξίσωση $y = x + \beta$ με $\beta \in \mathbb{R}$ παριστάνει οικογένεια ευθειών παράλληλων προς την $y = x$. Σ Λ
10. Η εξίσωση $xy = x$ παριστάνει μια μόνο ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου. Σ Λ
11. Ορίζεται τρίγωνο με πλευρές που έχουν εξισώσεις $3x - y = 4$, $y = -5x - 4$, $y = 3x + 5$. Σ Λ
12. Για την απόσταση $d(A, \varepsilon)$ του σημείου A από την ευθεία ε ισχύει $d(A, \varepsilon) = 0$. Το σημείο A ανήκει στην ευθεία ε . Σ Λ
13. Η εξίσωση $x = y$ για $x \geq 0$ παριστάνει μια ημιευθεία. Σ Λ
14. Το σύστημα των εξισώσεων δύο παράλληλων ευθειών είναι αδύνατο. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Στο διπλανό σχήμα η εξίσωση της ευθείας OA είναι $y = \sqrt{3}x$. Η γωνία OAB ισούται με
 Α. 30° Β. 60° Γ. 45°
 Δ. 90° Ε. 135°
- 
2. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που είναι παράλληλη με τον $y'y$ ισούται με
 Α. 1 Β. -1 Γ. 0 Δ. $\text{ef } \frac{\pi}{4}$ Ε. δεν ορίζεται
 3. Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(0, 0)$, $B(\alpha, 0)$ και $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι
 Α. $\frac{\alpha\beta}{2}$ Β. $\frac{\alpha|\beta|}{2}$ Γ. $\alpha\beta$ Δ. $\frac{|\alpha\beta|}{2}$ Ε. $\frac{|\alpha|\beta}{2}$
 4. Οι ευθείες $y = 2$ και $y = \sqrt{3}x - 1$ σχηματίζουν μεταξύ τους οξεία γωνία ίση με
 Α. 30° Β. 60° Γ. 45° Δ. 75° Ε. 15°
 12. Δυο ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται. Τότε το σύστημα των εξισώσεων τους
 Α. έχει άπειρες λύσεις Β. έχει μοναδική λύση Γ. δεν έχει λύση Δ. έχει δύο λύσεις
 Ε. έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x, x)

Ερωτήσεις αντιστοίχισης- διάταξης

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία που η εξίσωσή της βρίσκεται στη στήλη (Α) με τον συντελεστή της που βρίσκεται στη στήλη (Β) ($\alpha, \beta \neq 0$).

στήλη Α	στήλη Β
1) $\epsilon_1: y = \alpha x + \beta$	Α) 0 Β) δεν ορίζεται
2) $\epsilon_2: y = y_0$	Γ) 1 Δ) β
3) $\epsilon_3: x = x_0$	Ε) α ΣΤ) $-\frac{\beta}{\alpha}$
4) $\epsilon_4: \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$	
5) $\epsilon_5: \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$	Ζ) $-\frac{\alpha}{\beta}$

2. Η πρώτη στήλη περιέχει τους συντελεστές διεύθυνσης κάποιων ευθειών και η δεύτερη τις γωνίες που σχηματίζουν οι ίδιες ευθείες με τον άξονα $x'x$. Να συνδέσετε με μια γραμμή τα αντίστοιχα στοιχεία.

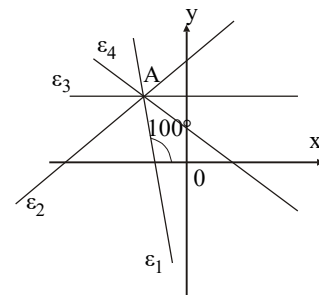
στήλη Α	στήλη Β
1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	Α) 0 Β) $\frac{\pi}{4}$ Γ) $\frac{2\pi}{3}$
2) $-\sqrt{3}$	Δ) $\frac{\pi}{6}$ Ε) $\frac{\pi}{3}$ ΣΤ) $\frac{\pi}{2}$
3) δεν ορίζεται	
4) -1	Ζ) $\frac{5\pi}{6}$ Η) $\frac{3\pi}{4}$
5) 0	

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος ευθειών της στήλης(Α) με το συνημίτονο της οξείας γωνίας τους στη στήλη (Β).

στήλη Α	στήλη Β
1) $\epsilon_1: y = x, \quad \epsilon_2: x = 5$	Α) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Β) 0
2) $\epsilon_1: y = 3, \quad \epsilon_2: y = \sqrt{3}x + 5$	
3) $\epsilon_1: x = -2, \quad \epsilon_2: \sqrt{3}x - 3y = 0$	Γ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Δ) 1 Ε) $\frac{1}{2}$

5. Να γραφούν τα σημεία Α (1, 3), Β (-3, 1) και Γ (2, 2) σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα να απέχει από την ευθεία $y = x$ απόσταση μεγαλύτερη από την απόσταση του προηγούμενου του.

6. ** Στο διπλανό σχήμα να γράψετε σε μια σειρά τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α, έτσι ώστε καθεμιά να έχει συντελεστή μικρότερο της προηγούμενής της.



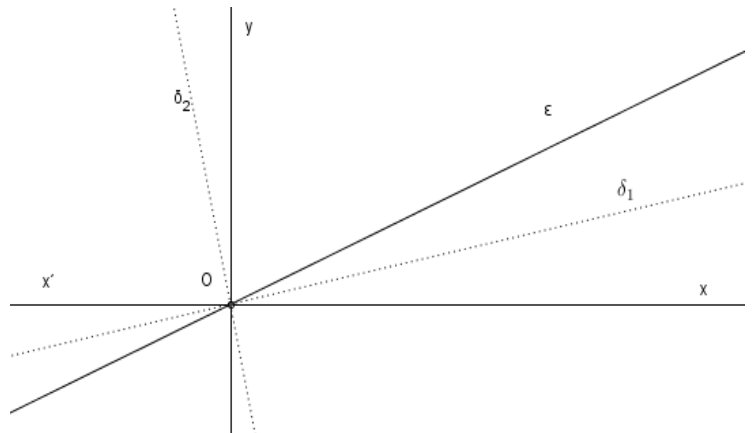
- Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και είναι:
 - παράλληλη στην ευθεία $x + 2y + 1 = 0$
 - κάθετη στην ευθεία $3x - y + 5 = 0$
 - διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 - παράλληλη στον άξονα $x'x$
 - παράλληλη στον άξονα $y'y$
 - παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων
 - σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 32 τ.μ.
- Τα σημεία A (1, 1), B (2, 2) και Γ(3, - 1) είναι τρεις διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Να βρεθούν:
 - οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του
 - οι συντεταγμένες του κέντρου του
 - το εμβαδόν του
- Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)x - (\lambda^2 + \lambda - 2)y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$
 - Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία;
 - Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 - Να εξετάσετε αν οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.
 - Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία (1) να είναι παράλληλη στην $y = x$
 - Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία να διέρχεται από το σημείο A(1, -3).
- Δίνονται τα σημεία A (4, 2), B (3, -1) και η ευθεία $\varepsilon: y = -3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ε , ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή το B.
- Δίνονται τα σημεία A (1, 4) και B (-1, -5).
 - Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος AB.
 - Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθύγραμμου τμήματος AB.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία AB.
 - Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία AB.
- Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$ και $\varepsilon_2: \mu x - (3\mu + 2)y + 7 = 0$.
Να βρείτε τον μ , ώστε η γωνία των ε_1 και ε_2 να είναι 90° .
- Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$.
 - Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 παράλληλες.
 - Αν $\varepsilon_1: x + y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2: x + y - 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2 .
 - Αν Α είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και Β σημείο της ευθείας ε_2 με τεταγμένη το 1, τότε:
 - να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β
 - να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο
- Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$, με $\lambda \neq 0$.
 - Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες
 - Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ .
- Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2(xy - 2x - 2y) + 3 = 0$.
 - Να αποδείξετε ότι παριστάνει δυο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. Έστω $\varepsilon_1: x + y = 1$ και $\varepsilon_2: x + y = 3$ οι δυο ευθείες.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπέζιου που σχηματίζεται από τους άξονες και τις ευθείες.
 - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή Ο και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Α, Β ώστε $(AB) = 2$
- Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y - 10\lambda + 16 = 0$ και $\varepsilon_2: 10x + y - 2\lambda - 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε το σημείο τομής τους Μ
 - Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το σημείο Μ ανήκει σε ευθεία ε .
 - Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:
 - να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι παράλληλη

προς την ευθεία AB **ii)** αν K είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$.

11. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda-1, 12-2\lambda)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(4,6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. **α)** Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος BΓ. **β)** Αν το σημείο A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ, να βρείτε την τιμή του λ. **γ)** Για $\lambda=4$, να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ABΔΓ να είναι ρόμβος.
12. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία $A(3,1)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(2,4)$. **α)** Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ. **β)** Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους ΒΔ και της διαμέσου ΑΜ.
13. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x-4y-7=0$ και τα σημεία $A(-2, 4)$ και $B(2, 6)$. **α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Μ της ευθείας ε , το οποίο ισαπέχει από τα σημεία Α και Β. **β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ. **γ)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x-2y-5=0$ και $x-2y+25=0$.
14. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3,4)$ και $\Gamma(2\lambda+1, 1-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :
α) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο και το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι σταθερό.
β) η κορυφή Γ κινείται σε ευθεία παράλληλη στην ΑΒ.
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ.
15. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι $\Pi_1(t-1, t+2)$ και $\Pi_2(3t, 3t-1)$ για κάθε χρονική στιγμή t ($t \geq 0$). **α)** Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία. **β)** Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν. **γ)** Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$.

Ασκήσεις τράπεζας Θεμάτων

16. Θεωρούμε μία ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x$ με θετική κλίση λ . **α)** Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον x' άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_1 είναι: $y = \lambda_1 x$ με $\lambda_1 = \frac{\lambda}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$.



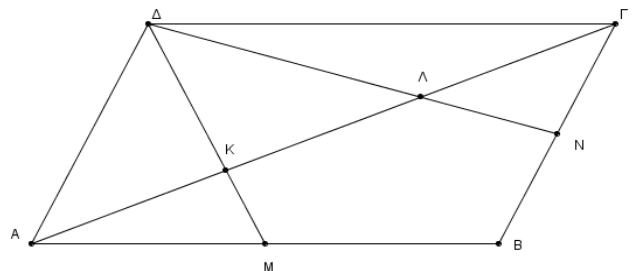
β) Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον x' άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_2

είναι: $y = \lambda_2 x$ με $\lambda_2 = \frac{\lambda}{1-\sqrt{1+\lambda^2}}$ **γ)** Αν $\lambda = 1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του α)

ερωτήματος για να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\phi 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$

17. Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $\Gamma(10,4)$, $\Delta(2,4)$.

Τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, ενώ Κ και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔΜ και ΔΝ την διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα : **α)** Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

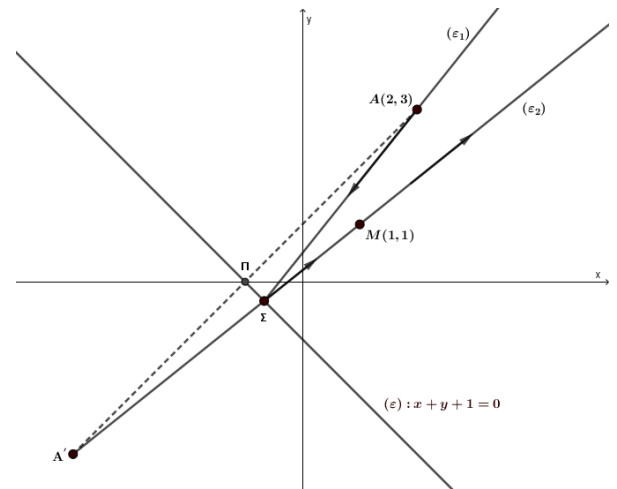


β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Ν. **γ)** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών

- ΑΓ, ΔΜ, ΔΝ και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων Κ και Λ. **δ)** Να δείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο ΑΓ, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.
18. Δίνεται το σημείο $A(1, -3)$ και η ευθεία $\varepsilon: 4x + 6y = 1$. **α)** Να εξηγήσετε γιατί το Α δεν είναι σημείο της ευθείας ε . **β)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη στην ευθεία ε .
19. Δίνονται οι εξισώσεις $\lambda x + y = 2\lambda$ (1) και $x + \lambda y = \lambda + 1$ (2), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν ευθείες ε_λ και η_λ αντίστοιχα. **β)** Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε_λ και η_λ τέμνονται.
γ) Για $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ **i.** να βρείτε συναρτήσες του λ τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των ε_λ και η_λ . **ii.** αν $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}, \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$ να αποδείξετε ότι το Μ κινείται στην ευθεία $\zeta: x - y = 1$
20. **α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$.
β) Αν $\varepsilon_1: 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon_2: 7x - y - 1 = 0$ είναι $\hat{\varphi} = 45^\circ$. **γ)** Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 .
δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3
21. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$ (E) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x - 8y + 3 = 0$.
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (E) παριστάνει ευθεία. **β)** Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (E), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. **γ)** Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (E) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε);
δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(1,3)$ από την ευθεία (ζ).
22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(5, -1)$.
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **β)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.
γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση.
δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$.
23. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $O(0, 0)$, $B(\kappa, 0)$ και $\Gamma(0, 2\kappa)$ όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου ΟΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ, τότε: **α)** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΖ. **β)** Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΒΓ που διέρχεται από το Ο.
γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο.

24. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$. **α)** Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. **β)** Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα xx' . **γ)** Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι 15° . **δ)** Να αποδείξετε ότι $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

25. Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.



α) Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1,0)$

β) Να

αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την

ευθεία (ε) , είναι το σημείο $A'(-4,-3)$

γ) i) Αν

γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2) , η

οποία διέρχεται από τα σημεία A', Σ, M , τότε να βρείτε την

εξίσωσή της **ii)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου

πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε) . **γ)** Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1) .

26. Δύο οικισμοί A και B βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(3,1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $\delta: x + y - 1 = 0$.

α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ : **i.** Ο οικισμός A έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.

ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.

β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία A, B και Γ είναι ίσο με 8.

27. Δύο οικισμοί A και B βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(3,1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $\delta: x + y - 1 = 0$. **α)** Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ : **i.** Ο οικισμός A έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο. **ii.** Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς. **β)** Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία A, B και Γ είναι ίσο με 8.

28. Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-2)$. **α)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$. **β)** Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε: **i)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .

ii) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = 2\overrightarrow{\Gamma E}$. **γ)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία DE είναι παράλληλη της $B\Gamma$

29. Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B . Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δεύτερου $B(3t-1, -4t-1)$. **α)** Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία. **β)** Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;

- γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t=2$. δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία $\varepsilon: 4x+3y+7=0$ ισούται με 6.
30. Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις A και B έχουν συντεταγμένες $A(3,6)$ και $B(7,-2)$. α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή.
β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ , ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία A , B και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη .
31. Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha + 1, 1 - \alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, με $\alpha \in P$.
α) Να αποδείξετε ότι: i) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$
ii) Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.
iii) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$ β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:
«Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας
32. Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_\alpha: (\alpha - 4)x - 2\alpha y + \alpha + 4 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\alpha = 0$ και όταν $\alpha = 1$ και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο M .
β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το M .
γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha < 4$. δ) Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $(OA) = 2(OB)$
33. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -2)$ και $\vec{\beta} = (1, 1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2, 1)$
α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα. β) Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB , i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(4, -1)$ και $B(3, 2)$ να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$. iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και $|\overline{K\Gamma}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$.
34. Δίνεται η ευθεία $y = \lambda(x - 2) + \lambda - 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1). α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda = 1$ και όταν $\lambda = 2$. Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο M των δυο ευθειών. Έστω $M(1, -2)$ β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ , διέρχονται από το M .
γ) Να βρείτε: τα σημεία τομής A , B της ευθείας (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

35. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η

εξίσωση ευθείας $\varepsilon_\lambda : \lambda x + (1 - \lambda)y + 2 = 0$, όπου λ

αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbf{R}$, παριστάνει τη φωτεινή

ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ

.Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι

αγκυροβολημένο στο σημείο $O(0,0)$. **α)** Να βρείτε τις

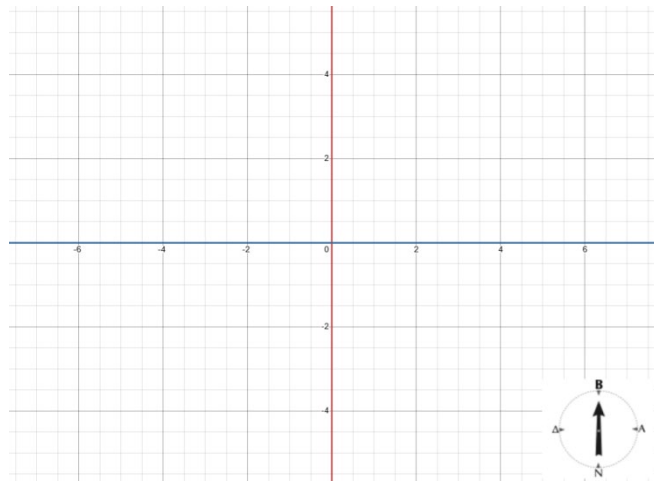
συντεταγμένες του φάρου Φ . Να εξετάσετε αν υπάρχει

φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το

αγκυροβολημένο πλοίο. **β)** Ένα ρυμουλκό πλοίο P

βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το P έχει εξίσωση $x + y + 4 = 0$. Να βρείτε

τις συντεταγμένες του σημείου P όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους



36. Δύο εργοστάσια A και B τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες $A(2,1), B(4,3)$,

βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο

εργοστάσια. **α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια. **β)** Αν η ακτή είναι

ευθύγραμμη με εξίσωση $\varepsilon: y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο

πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια. **γ)** Αν το ζητούμενο

σημείο του ερωτήματος β) είναι $N(4,1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

37. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$ **α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η (ε): $y =$

$2x - 1$. **β)** Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την

ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. **γ)** Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

38. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha, 0)$, $B(\frac{\alpha}{2}, \beta)$ και $M(\frac{\alpha}{2}, 0)$, όπου α, β σταθεροί θετικοί πραγματικοί

αριθμοί. **α)** Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA .

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι $OB: 2\beta x - \alpha y = 0$ και

$AB: 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$ αντίστοιχα. **γ)** Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και

d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$. **δ)** Ποια πρόταση της

Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

39. Δίνονται τα σημεία $A(1,3), B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbf{R}$. **α)** Να βρείτε για ποια τιμή

του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την

ευθεία ε . **β)** Για $\alpha = 4$ **i.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε

με τον άξονα $y'y$. **ii.** Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων

40. Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(7, 9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB) = 12$ τ.μ. **α)** Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$. **β)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2) . **γ)** Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2) , που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2 ; Εξηγήστε

41. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(3,1)$. **α)** Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο. **β)** Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία (ε) :

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}.$$

γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του **β)** ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA) = (KB)$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K ;

42. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$. **α)** Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το M . Να βρείτε: Την εξίσωση της. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες. **β)** Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ , τα μήκη των τμημάτων OA, OB . **γ)** Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο. **δ)** Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

43. Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4)$, $B(2,5)$ και $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha - 1, 3\alpha + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. **α)** Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο. **β)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$. **γ)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$. **δ)** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

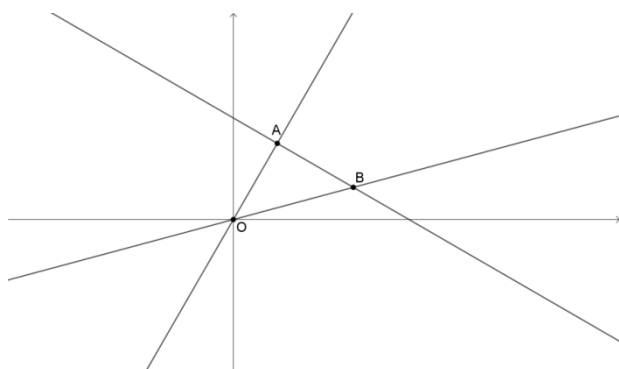
44. Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$ (1), όπου $\mu \in \mathbb{R}$. **α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε **β)** Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε :

i. είναι παράλληλες στον xx' . **ii.** είναι παράλληλες στον yy' . **iii.** διέρχονται από το $(0,0)$.

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

45. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία

$O(0,0)$, $A(1, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$. **α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$. **β)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας



AB καθώς και τη γωνία ϕ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB

είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$ δ) Να δείξετε ότι $\epsilon\phi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.