

Κεφάλαιο 1ο:

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

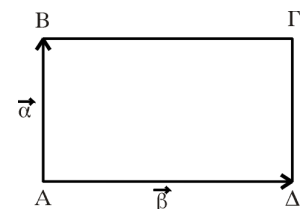
- | | | |
|--|---|---|
| 1. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα. | Σ | Λ |
| 2. Αν $ \vec{a} = \vec{b} $, τότε $\vec{a} = \vec{b}$. | Σ | Λ |
| 3. Αν $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GD} = \vec{0}$, τότε $\vec{AD} = \vec{0}$. | Σ | Λ |
| 4. Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy το διάνυσμα $\vec{OA} = \lambda \vec{i} + \lambda \vec{j}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας xOy. | Σ | Λ |
| 5. Αν $\vec{AB} = \vec{BA}$, τότε $\vec{AB} = \vec{0}$. | Σ | Λ |
| 6. Τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{OA} - \vec{OB}$ είναι ίσα. | Σ | Λ |
| 7. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διευσθύνσεως. | Σ | Λ |
| 8. Το διάνυσμα $\vec{a} = (-2, 2)$ είναι παράλληλο με το $\vec{b} = (3, -3)$. | Σ | Λ |
| 9. Αν $\vec{a} = -\vec{b}$, τότε $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{a}) = 2\pi$. | Σ | Λ |
| 10. Αν είναι $(\vec{a}, \vec{b}) > \frac{\pi}{2}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$. | Σ | Λ |
| 11. Αν $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, τότε $(\vec{a}, \vec{b})$ είναι οξεία. | Σ | Λ |
| 12. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ ισχύει: $ \vec{a} + \vec{b} \leq \vec{a} + \vec{b} $. | Σ | Λ |
| 13. Αν $ \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} $, τότε τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι πάντα συγγραμμικά. | Σ | Λ |
| 14. Για τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ ισχύει: $ \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} $ | Σ | Λ |
| 15. Αν $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε οπωσδήποτε $\vec{a} = \vec{0}$. | Σ | Λ |
| 16. Αν $\kappa \vec{a} = \lambda \vec{a}$, τότε $\kappa = \lambda$ για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$. | Σ | Λ |
| 17. Το $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα. | Σ | Λ |
| 18. Το $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα. | Σ | Λ |
| 19. Τα ζεύγη $\vec{a}, \vec{b}$ και $-\vec{a}, -\vec{b}$ των διανυσμάτων έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα. | Σ | Λ |
| 20. Αν AM διάμεσος τριγώνου ABΓ τότε $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AG}}{2}$. | Σ | Λ |
| 21. Δυο διανύσματα με ίσους συντελεστές διευσθύνσεως είναι ομόρροπα. | Σ | Λ |
| 22. Αν $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$ και $\vec{a}, \vec{b}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \mu = 0$. | Σ | Λ |
| 23. Το διάνυσμα $\lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda < 0$ είναι συγγραμμικό του $\vec{a}$. | Σ | Λ |
| 24. Ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow M$ μέσο του $\vec{AB}$. | Σ | Λ |
| 25. Αν $\kappa \vec{a} = \lambda \vec{b}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{a}, \vec{b}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \kappa = 0$. | Σ | Λ |
| 26. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα | Σ | Λ |

27. Όταν οι συντελεστές δυο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι κάθετα. Σ Λ
28. Τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = -\vec{i} + \vec{j}$ είναι κάθετα. Σ Λ
29. Αν $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$ όπου A, B σταθερά σημεία, τότε ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η μεσοκάθετη ευθεία του AB. Σ Λ
30. Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Σ Λ
31. Μπορούμε να γράφουμε: $\vec{a} (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}$. Σ Λ
32. Αν $\vec{a} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$ τότε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$. Σ Λ
33. Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ τότε είναι πάντα $(\vec{a}, \vec{\beta}) \neq \frac{\pi}{2}$. Σ Λ
34. Αν $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (2, -6)$ είναι $\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Σ Λ
35. Υπάρχουν $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (\frac{1}{\sin\theta}, \frac{1}{\eta\mu\theta})$ και $\vec{\beta} = (\eta\mu\theta, \sin\theta)$ να είναι κάθετα. Σ Λ
36. Υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (x + 1, 3)$ και $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι κάθετα. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

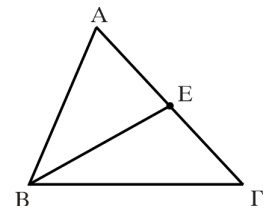
1. Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι: $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\vec{BD}$ ισούται με:

A. $\vec{a} + \vec{\beta}$ B. $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$ Γ. $\frac{\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$ Δ. $\frac{\vec{\beta} - \vec{a}}{2}$ Ε. $\vec{\beta} - \vec{a}$



- 2 Στο τρίγωνο ABΓ η BE είναι διάμεσος. Το άθροισμα $\vec{BA} + \vec{BG}$ ισούται με

A. $\vec{BE}$ B. $\vec{GA}$ Γ. $2\vec{EB}$ Δ. $2\vec{BE}$ Ε. $2\vec{AG}$



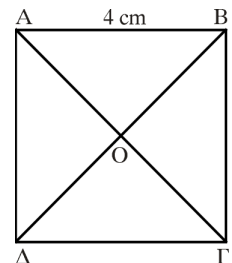
3. Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$ διάφοροι του ± 1 και $\kappa\vec{a} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε

A. κ, λ θετικοί B. κ, λ αρνητικοί Γ. κ, λ αντίστροφοι Δ. κ, λ ετερόσημοι
Ε. κανένα από τα προηγούμενα

4. Το διάνυσμα $\vec{a} = (\lambda^2 - 3\lambda - 4, \lambda - 2)$ είναι μηδενικό με

A. $\lambda = 2$ B. $\lambda = 1$ Γ. $\lambda = -4$ Δ. $\lambda = 0$ Ε. για κανένα πραγματικό αριθμό λ

5. Τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda^2, 2\lambda)$ και $\vec{b} = (1, -2)$ είναι παράλληλα ($\lambda \neq 0$). Ο λ ισούται με
 Α. -2 Β. -1 Γ. $\sqrt{2}$ Δ. 1 Ε. 2
6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-2, 4)$ και $\vec{b} = (3, -2)$. Η σχέση $\vec{a} + \kappa\vec{b} = \vec{0}$ ισχύει με
 Α. $\kappa = \frac{2}{3}$ Β. $\kappa = -\frac{2}{3}$ Γ. $\kappa = -2$ Δ. $\kappa = 2$ Ε. κανένα $\kappa \in \mathbb{R}$
7. Το διάνυσμα $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι το μηδενικό με
 Α. $\theta = 2\kappa\pi$ Β. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ Γ. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ Δ. $\theta = 2\kappa\pi + \pi$ Ε. καμία τιμή του θ
8. Είναι $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$. Το $\vec{a}$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ με
 Α. $\theta = \kappa\pi$ Β. $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ Γ. $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ Δ. $\theta = \kappa\pi + \pi$ Ε. $\theta = \kappa\pi - \pi$
9. Το διάνυσμα $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, είναι παράλληλο στο $\vec{b} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ με
 Α. $\theta = 0$ Β. $\theta = \frac{\pi}{4}$ Γ. $\theta = \frac{\pi}{2}$ Δ. $\theta = \pi$ Ε. $\theta = \frac{2\pi}{3}$
10. Τα διανύσματα $\vec{a} = \left(\lambda, \frac{1}{\lambda}\right)$ και $\vec{b} = \left(-1, \frac{8}{\lambda}\right)$ είναι κάθετα με
 Α. $\lambda = -1$ Β. $\lambda = 0$ Γ. $\lambda = 1$ Δ. $\lambda = 2$ Ε. $\lambda = 8$
11. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -2)$, $\vec{b} = (1, -1)$ και $\vec{\gamma} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Σωστή είναι η σχέση
 Α. $\vec{a} = \vec{b}$ Β. $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = \vec{b}$ Γ. $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{\gamma}$ Δ. $\vec{a} \perp \vec{\gamma}$ Ε. $\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{\gamma}$
12. Είναι $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Από τις παρακάτω σχέσεις **δεν μπορεί να ισχύει**:
 Α. $\vec{a} = 0$ Β. $\vec{b} \perp \vec{a}$ Γ. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ Δ. $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ Ε. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$
13. Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 4 cm. Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη;
 Α. $\vec{AB} \cdot \vec{GB} = 0$ Β. $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = 8$ Γ. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 16$
 Δ. $\vec{AB} \cdot \vec{GD} = -16$ Ε. $\vec{OB} \cdot \vec{BA} = 8$



14. Αν $|\vec{k}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\vec{k} \cdot \vec{v} = -3$ και $0 \leq \hat{\theta} = (\vec{k}, \vec{v}) < \pi$, τότε η γωνία θ ισούται με
 Α. 0° Β. 30° Γ. 60° Δ. 120° Ε. 150°

15. Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι μη μηδενικά. Το $\sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$ ισούται με

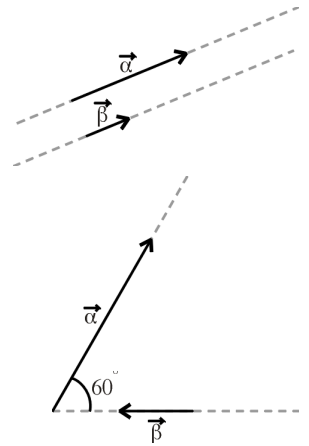
- A. $\frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$ B. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ Γ. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$ Δ. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$ Ε. $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$

16. Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ισούται με

- A. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ B. $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ Γ. 0 Δ. $\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ Ε. $-\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

17. Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ισούται με

- A. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ B. $\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ Γ. $\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
Δ. $-\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ Ε. $-\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

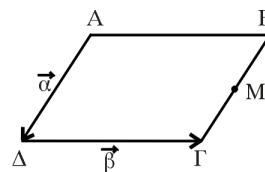


Ερωτήσεις διάταξης

- Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ σε μια σειρά, ώστε καθένα να έχει μικρότερο μέτρο από το επόμενο του, αν $\vec{a} = (3, 0)$, $\vec{b} = (1, -3)$, $\vec{\gamma} = (\frac{3}{2}, 1)$, $\vec{\delta} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$.
- Δίνεται ότι $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{\gamma}| = |\vec{\delta}|$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, $(\vec{a}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$, $(\vec{a}, \vec{\delta}) = \frac{2\pi}{3}$. Να γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα εσωτερικά γινόμενα: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{\delta}$, $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$, $\vec{b} \cdot \vec{\delta}$, $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

- Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι: $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$ και M μέσο της BΓ. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης A του πίνακα με το ίσο του της στήλης B.



στήλη A	στήλη B
1. $\vec{AG}$	A. $\vec{b} - \vec{a}$ B. $\vec{a} + \vec{b}$
2. $\vec{BD}$	Γ. $\vec{a} - \vec{b}$ Δ. $\vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a}$
3. $\vec{DM}$	Ε. $\vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a}$ Ζ. $\frac{1}{2} \vec{a} - \vec{b}$
4. $\vec{AM}$	

2. Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα έχει μέτρο έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β μέτρο
1. $-\sqrt{8}\vec{i} + \vec{j}$ 2. $x\vec{i} + \psi\vec{j}$ 3. $(2\eta\mu\theta)\vec{i} - (2\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{j}$ 4. $(x - \psi)\vec{i} + 2\sqrt{x\psi}\vec{j}$	Α. $\sqrt{2}$ Β. $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$ Γ. 3 Δ. $\sqrt{x^2 + \psi^2}$ Ε. $\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$ Ζ. 2 Η. $ x + \psi $

3. Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα έχει συντελεστή διεύθυνσης έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β συντελεστής διεύθυνσης
1. $2\vec{i} + 2\vec{j}$ 2. $2\vec{i}$ 3. $\frac{2}{\sqrt{2}}\vec{j}$ 4. $2\vec{i} - 2\vec{j}$	Α. $\sqrt{2}$ Β. 2 Γ. 0 Δ. 4 Ε. δεν ορίζεται Ζ. 1 Η. -1

4. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα που βρίσκεται στην αριστερή στήλη Α του πίνακα με το μέτρο του, που βρίσκεται στη δεξιά στήλη Β.

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β μέτρο
1. (1, -1) 2. (2ημθ, 2συνθ) 3. $(\sqrt{2}, 1)$ 4. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	Α. 2 Β. 0 Γ. 1 Δ. 3 Ε. $\sqrt{3}$ Ζ. $\sqrt{2}$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Διάνυσμα	μέτρο διανύσματος	γωνία ($\vec{Ox}$, $\vec{a}$)
$\vec{a} = (-1, 1)$		
$\vec{\beta} = (1, -\sqrt{3})$		
$\vec{\gamma} = (-3, 3\sqrt{3})$		
$\vec{\delta} = (\sqrt{3}, 1)$		
$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$		

2. Να συμπληρωθούν οι στήλες στους παρακάτω πίνακες:

Διανύσματα		Σχετική θέση του $\vec{a}$ ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y'$, (γωνία που σχηματίζει)	Σχετική θέση του $\vec{\beta}$ ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y'$, (γωνία που σχηματίζει)	Σχετική θέση των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ μεταξύ τους (κάθετα ή παράλληλα)
$\vec{a}$	$\vec{\beta}$			
(2, 0)	(0, -3)			
(2, 2)	(-3, 3)			
(2, 2)	(3, 3)			
(0, 2)	(-2, 0)			

Διανύσματα		μέτρο: $ \vec{a} $	μέτρο: $ \vec{\beta} $	εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
$\vec{a}$	$\vec{\beta}$			
(-1, 4)	(2, -3)			
(3, 2)	(-1, $\sqrt{2}$)			
(1, $\sqrt{3}$)	(1, 1)			
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να προσδιοριστεί σημείο P τέτοιο ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{GP}$
2. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και ένα σημείο M τέτοιο ώστε να είναι $3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG} = \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι:
 $4\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{AG}$
3. Αν ισχύει $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{PG} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
4. Αν $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (3, -7)$, $\vec{\gamma} = (-2, 5)$ να βρεθούν τα διανύσματα: $\vec{a} - \vec{b} + \vec{\gamma}$ και $\vec{a} + 3\vec{b} - 8\vec{\gamma}$.
5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-1, 3)$ και $\vec{v} = (2, -1)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w} = (x, y)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 α) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ β) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$
 γ) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$ δ) $\vec{w} = \kappa\vec{u} + \lambda\vec{v}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
6. Δίνονται τα σημεία A (3, 2), B (7, -4). Να βρεθεί σημείο M του $x'x$, ώστε το τρίγωνο MAB να είναι:
 α) ισοσκελές με κορυφή το M β) ορθογώνιο στο M
7. Να βρείτε το σημείο M του άξονα $x'x$, ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα σημεία A (1, 2) και B (3, 4) να είναι ελάχιστο.
8. Αν $\vec{a} = (2x - y, x + 2y - 4)$, $\vec{b} = (x - 3y + 2, -3x + 2y - 2)$, $\vec{\gamma} = (3, -2)$ και $\vec{\delta} = (-3, 4)$ τότε:
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες (x_1, y_1) του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{\gamma}$
 β) Να βρείτε τη σχέση ανάμεσα στα x και y ώστε $\vec{u} \parallel \vec{\delta}$
 γ) Να υπολογιστούν τα x και y αν είναι $\vec{u} = \vec{0}$
9. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{u} = (-2, 6)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v} = (2, -1)$ και $\vec{w} = (3, 1)$.
10. Αν $\vec{a} \perp \vec{b}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - 3\vec{b})$ και $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{b}| = 1$.
11. Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{b} - \vec{a}, \vec{a})$
12. Αν $\vec{a} \perp \vec{b}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - 3\vec{b})$ και $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{b}| = 1$
13. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$, με $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} \parallel (\vec{a} + \vec{b})$ και $\vec{b} \perp (\vec{a} + \vec{x})$.

14. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1)$ και $\vec{b} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{b}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{a}$.
15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:
- α) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ β) $(\vec{a} + \vec{b})^2$ γ) $|\vec{a} + \vec{b}|$ δ) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 5\vec{b})$
16. Έστω $\vec{a}, \vec{b}$ διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Προσδιορίστε το $x \in \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - x\vec{b}) = -2$ β) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (\vec{a} - x\vec{b})$.
17. Θεωρούμε τα σημεία $A(a+1, 3)$, $B(a, 4)$ και $\Gamma(-4, 5a+4)$, $a \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$. β) Να βρείτε για ποια τιμή του a , τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.
- γ) Αν $a=1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$.
18. Θεωρούμε τα σημεία $A(1+2a, 4a-2)$ και $B(5a+1, -a)$, $a \in \mathbb{Z}$.
- α) Να γράψετε το $\overrightarrow{AB}$ συναρτήσει του a και να βρείτε το a ώστε $|\overrightarrow{AB}| = 10$.
- β) Έστω $a=2$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB .
19. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} + \vec{b}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = -3\vec{b}$, όπου $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$.
- α) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων: i) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ii) $(4\vec{b} + 2\vec{a})^2$ iii) $|\vec{a} - \vec{b}|$.
- β) Αν M είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$:
- i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{a}, \vec{b}$.
- ii) Να βρείτε τη γωνία των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.
20. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι: $\overrightarrow{AB} = (-4, -6)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (2, -8)$.
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$, όπου AM είναι η διάμεσος του $AB\Gamma$.
- β) Να αποδείξετε ότι η γωνία A είναι οξεία.
- γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $A(3, 1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ .
21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ με $|\vec{b}| = 2|\vec{a}| = 4$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$.
- α) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{b})$. β) Να αποδείξετε ότι $\vec{b} + 2\vec{a} = \vec{0}$.

22. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν: $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$, $2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1$ και $(\hat{\vec{\alpha}}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$
23. Δίνονται τα σημεία A(2, 3), B(-1, 5) και Γ(-2, -4). α) Να δείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.
β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του B ως προς το μέσο M της AG.
γ) Τι σχήμα είναι το ABΓΔ; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.
24. Δίνονται τα σημεία A (5, - 1), B (1, 1) και Γ (2, 3).
α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι κορυφές τριγώνου ABΓ και να βρείτε το είδος του.
β) Να υπολογίσετε το τις συντεταγμένες της $\overline{AM}$ όπου M μέσο του BΓ.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM .
25. Δίνονται τα σημεία A(-1, 2) , B(1, 3) και Γ(0, 2).
α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Δ ώστε το ABΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.
β) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κέντρου του ;
26. Να βρείτε διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{a} = (1, 4)$ το οποίο να έχει μέτρο $3\sqrt{17}$.
27. Αν τα σημεία A , B και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς ένα το ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα : $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = (3, 5)$ και $\vec{\gamma} = (-3, 2)$ αντίστοιχα, τότε :
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overline{AB}$ και $\overline{AG}$
β) Να αποδείξετε ότι τα A, B , Γ είναι συνευθειακά γ) να βρείτε τη σχετική θέση των A, B και Γ
28. Δίνονται τα σημεία A(3,4) , B(5,7) και Γ(2μ+1, 3μ-2), όπου $\mu \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{AG}$, και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ δεν εξαρτάται από το μ.
ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ;
29. Δίνονται τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, B(2,-1) και $\Gamma\left(\mu, \frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$. α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{B\Gamma}$. β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu \cdot \overline{B\Gamma} = -\overline{AB}$. δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma)=1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

30. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\hat{\vec{\alpha}}, \vec{\beta})=60^\circ$ και

$$\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}. \quad \alpha) \text{ Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

$\beta)$ Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε: $i)$ να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$. $ii)$ να υπολογίσετε το μέτρο του $\vec{\gamma}$.

$iii)$ να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

31. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda+1)$, $\overrightarrow{AG} = (3\lambda, \lambda-1)$, όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$, και M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. $\alpha)$ Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$ $\beta)$ Να βρείτε την τιμή του λ για την

$$\text{οποία το διάνυσμα } \overrightarrow{AM} \text{ είναι κάθετο στο διάνυσμα } \vec{\alpha} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda \right)$$

$\gamma)$ Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα $\beta)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

32. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$, για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ και } |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1. \quad \alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}.$$

$\beta)$ Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} - 3\vec{v}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$.

33. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύουν: $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{7}, 1 \right)$, και $\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} = (\mu+2, 7-2\mu)$

$\alpha)$ Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση του μ .

$\beta)$ Αν $\mu=2$, τότε: $i.$ να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, 4)$ και ότι το $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}$.

$ii.$ να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

34. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = (7, 3)$.

$\alpha)$ Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά ανά δύο. $\beta)$ Να γραφεί το

διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

35. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο O .

$$\text{Αν } \overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}, \quad \overrightarrow{OB} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} \text{ και } \overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma}, \text{ τότε:}$$

$\alpha)$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

$\beta)$ να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ είναι συνευθειακά.