

Διαγώνισμα στους πραγματικούς αριθμούς

Θέμα Α

Α 1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

α) Αν x πραγματικός αριθμός, τότε: $x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$

β) Αν $\alpha, \beta < 0$, τότε $\alpha + \beta > 0$ και $\alpha\beta > 0$.

γ) Αν x πραγματικός αριθμός, τότε: $|x-1| = |1-x|$

δ) Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε: $|\alpha| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

ε) Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε: $|\alpha| < |\beta| \Rightarrow \alpha < \beta$

στ) $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

ζ) $\sqrt{x^4 + y^4} = x^2 + y^2$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y .

μονάδες 7x2

Α 2. Να αποδείξετε ότι $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β .

μονάδες 11

Θέμα Β

Δίνονται οι αριθμοί $A = \alpha^2 - 2\alpha$ και $B = \beta^2 - 4\beta + 5$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

Β 1. Να αποδείξετε ότι $A \geq -1$ και $B > 0$.

μονάδες 10

Β 2. Αν $1 < \alpha < 3$ και $2 < \beta < 4$, να δείξετε ότι $-3 < \alpha - \beta < 1$ και $1 < \frac{4\alpha}{\beta} < 6$.

μονάδες 8

Β 3. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνονται οι αριθμοί $A = |x| + 1$ και $B = x + 1$, όπου x πραγματικός αριθμός.

Γ 1. Να αποδείξετε ότι $A \geq B$. Πότε ισχύει η ισότητα;

μονάδες 6

Γ 2. Να αποδείξετε ότι $|B^2 - 2x| - |A^2 - x^2 - 1| = (A - 2)^2$.

μονάδες 7

Γ 3. Αν $2 < x < 5$, να δείξετε ότι $|B - 3| + |6 - B| = 3$.

μονάδες 6

Γ 4. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση $\Gamma = A + |B|$.

μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x+1}$.

Δ 1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .

μονάδες 4

Δ 2. Να αποδείξετε ότι $A + \frac{1}{A} \geq 2$ για κάθε $x > -1$.

μονάδες 5

Δ 3. Να αποδείξετε ότι $A + B + \Gamma + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{\Gamma} \geq 6$, όπου B, Γ θετικοί αριθμοί.

μονάδες 4

Δ 4. Αν $x > -1$ και $x \neq 0$ να μετατρέψετε την παράσταση $\frac{1}{A-1}$ σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.

μονάδες 4

Δ 5. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[9]{A^8} \cdot \sqrt[6]{A^5} = A\sqrt[18]{A^{13}}$

μονάδες 4

Δ 6. Έστω $x = 1$. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[3]{A^2} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{5}} = A$

μονάδες 4

Καλή επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

Θέμα Α

A 1. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ στ) Λ ζ) Λ

A 2. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \Leftrightarrow |\alpha\beta|^2 = (|\alpha||\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha\beta)^2 = |\alpha|^2 |\beta|^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \beta^2 = \alpha^2 \beta^2$ ισχύει

Θέμα Β

B 1. $A \geq -1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha \geq -1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0$ ισχύει

$B > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\beta + 5 > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\beta + 4 + 1 > 0 \Leftrightarrow (\beta - 2)^2 + 1 > 0$ ισχύει γιατί

$(\beta - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\beta - 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$

B 2. Είναι $2 < \beta < 4 \Leftrightarrow -2 > -\beta > -4 \Leftrightarrow -4 < -\beta < -2$ (1) και $1 < \alpha < 3$ (2)

Από (1)+(2) $\Rightarrow 1 - 4 < \alpha - \beta < 3 - 2 \Leftrightarrow -3 < \alpha - \beta < 1$

Επίσης $1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 4 < 4\alpha < 12$ (3) και $2 < \beta < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\beta} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2}$ (4)

Με πολλαπλασιασμό των (3),(4) κατά μέλη έχουμε: $4 \cdot \frac{1}{4} < 4\alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 12 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < \frac{4\alpha}{\beta} < 6$

B 3. $A + B \geq \alpha^2 - 2\alpha + \beta^2 - 4\beta + 5 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 - 4\beta + 4 = (\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 \geq 0$ γιατί

$(\alpha - 1)^2 \geq 0$ και $(\beta - 2)^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και $\beta - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 2$.

Θέμα Γ

Γ 1. $A \geq B \Leftrightarrow |x| + 1 \geq x + 1 \Leftrightarrow |x| \geq x$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ 2. Είναι $B^2 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, $A^2 = (|x| + 1)^2 = x^2 + 2|x| + 1$

$|B^2 - 2x| - |A^2 - x^2 - 1| = |(x^2 + 2x + 1) - 2x| - |(x^2 + 2|x| + 1) - x^2 - 1| = (|x^2 + 2x + 1 - 2x|) - (|x^2 + 2|x| + 1 - x^2 - 1|) = (|x^2 + 2x|) - (|x^2 + 2|x||) \Leftrightarrow$

$|x^2 + 1| - |2|x|| = (|x| - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2|x| = (|x| - 1)^2$ ισχύει

Γ 3. $|B - 3| + |6 - B| = |x + 1 - 3| + |6 - x - 1| = |x - 2| + |5 - x|$

Είναι $2 < x < 5 \Leftrightarrow 2 - 2 < x - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 0 < x - 2 < 3$ και

$2 < x < 5 \Leftrightarrow -2 > -x > -5 \Leftrightarrow 5 - 2 > 5 - x > 5 - 5 \Leftrightarrow 3 > 5 - x > 0$, οπότε

$|B - 3| + |6 - B| = |x - 2| + |5 - x| = \cancel{x} - 2 + 5 - \cancel{x} = 3$

Γ 4. Είναι $\Gamma = |x| + 1 + |x + 1|$

$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	-	0	-	+
x+1	-	-	+	+

Αν $x < -1$ τότε $\Gamma = -x + 1 - x - 1 = -2x$,

αν $-1 \leq x \leq 0$, τότε $\Gamma = -x + 1 + x + 1 = 2$ και τέλος αν $x > 0$ τότε $\Gamma = x + 1 + x + 1 = 2x + 2$.

Θέμα Δ

Δ 1. Η παράσταση $A = \sqrt{x + 1}$ ορίζεται όταν $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Δ 2. Επειδή για κάθε $x > -1$ είναι $A > 0$, έχουμε:

$$A + \frac{1}{A} \geq 2 \Leftrightarrow A \cdot A + \cancel{A} \cdot \frac{1}{\cancel{A}} \geq 2A \Leftrightarrow A^2 + 1 \geq 2A \Leftrightarrow A^2 - 2A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (A+1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει.}$$

Δ 3. Με βάση την προηγούμενη σχέση είναι $A + \frac{1}{A} \geq 2$ (1), $B + \frac{1}{B} \geq 2$ (2) και $\Gamma + \frac{1}{\Gamma} \geq 2$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2),(3) έχουμε: $A + B + \Gamma + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{\Gamma} \geq 6$

Δ 4.
$$\frac{1}{A-1} = \frac{1}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{x+1}+1}{x+1-1} = \frac{\sqrt{x+1}+1}{x}$$

Δ 5. Αν $x = -1$, τότε $A = 0$ και προφανώς η σχέση $\sqrt[9]{A^8} \cdot \sqrt[6]{A^5} = A \sqrt[18]{A^{13}}$ ισχύει.

Αν $x > -1$ τότε $A > 0$ και η σχέση γίνεται:

$$\sqrt[9]{A^8} \cdot \sqrt[6]{A^5} = A^{\frac{8}{9}} A^{\frac{5}{6}} = A^{\frac{8}{9} + \frac{5}{6}} = A^{\frac{16}{18} + \frac{15}{18}} = A^{\frac{31}{18}} = A^{\frac{18}{18} + \frac{13}{18}} = A \cdot A^{\frac{13}{18}} = A \sqrt[18]{A^{13}}$$

Δ 6. Για $x = 1$ είναι $A = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, τότε:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{A^2} \cdot \sqrt[3]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{5}} &= \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9-5} = \\ &= \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2 \end{aligned}$$