

11η Άσκηση

Πραγματικοί αριθμοί

Έστω $\alpha, \beta > 0$.

α) Αν $\alpha \neq \beta$ να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = (\alpha + \beta) + \sqrt{\alpha\beta}$.



β) Αν επιπλέον ο α είναι ρητός αριθμός, να δείξετε ότι ο $\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$ είναι ρητός.

γ) Αν $\alpha > \beta$ να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}$.

δ) Αν $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, τότε $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \gamma} > \frac{\alpha}{\beta}$.

ε) Να δείξετε ότι $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4$.

Έστω $a < b$.

στ) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $1, \frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\beta}{\alpha}$.

ζ) Να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1

από ότι ο αριθμός $\frac{\beta}{\alpha}$.

η) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{1 + \alpha} < \frac{\beta}{1 + \beta}$.

θ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha + \beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς

Λύση

$$\alpha) \frac{\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = (\alpha + \beta) + \sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow \alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})[(\alpha + \beta) + \sqrt{\alpha\beta}] \Leftrightarrow$$

$$\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta} = (\alpha + \beta)\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha^2\beta} - (\alpha + \beta)\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta} = \alpha\sqrt{\alpha} + \cancel{\beta\sqrt{\alpha}} + \cancel{\alpha\sqrt{\beta}} - \alpha\sqrt{\beta} - \beta\sqrt{\beta} - \cancel{\beta\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta} = \alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta} \text{ ισχύει}$$

2ος τρόπος

$$\frac{\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = (\alpha + \beta) + \sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow \alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})[(\alpha + \beta) + \sqrt{\alpha\beta}] \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\alpha^2 \cdot \alpha} - \sqrt{\beta^2 \cdot \beta} = (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})[\sqrt{\alpha^2} + \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta^2}] \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^3} - \sqrt{\beta^3} = \sqrt{\alpha^3} - \sqrt{\beta^3} \text{ ισχύει.}$$

$$\beta) \left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = (\sqrt{\alpha})^2 + 2\sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \alpha + 2 + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{\alpha} = \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha} = \text{ρητός}$$

$$\gamma) \text{ Επειδή } \alpha > \beta \text{ είναι } \alpha - \beta > 0 \text{ οπότε } \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} = \frac{\alpha + \cancel{\beta} + \alpha - \cancel{\beta}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

$$\delta) \text{ Είναι } \frac{\alpha}{\beta} < 1 \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

$$\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \gamma} > \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \cancel{\alpha\beta} + \gamma\beta > \cancel{\alpha\gamma} + \alpha\gamma \Leftrightarrow \gamma\beta > \alpha\gamma \Leftrightarrow \frac{\gamma\beta}{\gamma} > \frac{\alpha\gamma}{\gamma} \Leftrightarrow \beta > \alpha \text{ ισχύει}$$

$$\epsilon) (\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4 \Leftrightarrow \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \beta \cdot \frac{1}{\alpha} + \beta \cdot \frac{1}{\beta} \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} + \alpha\beta \cdot \frac{\beta}{\alpha} \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

$$\sigma\tau) \text{ Είναι } 0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{0}{\alpha} < \frac{\alpha}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 0 < 1 < \frac{\beta}{\alpha} \text{ (1) και } 0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{0}{\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\beta} \Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1 \text{ (2).}$$

$$\text{Από τις (1),(2) προκύπτει ότι } \frac{\alpha}{\beta} < 1 < \frac{\beta}{\alpha}.$$

$$\zeta) d\left(\frac{\alpha}{\beta}, 1\right) < d\left(\frac{\beta}{\alpha}, 1\right) \Leftrightarrow \left|1 - \frac{\alpha}{\beta}\right| < \left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right|. \text{ Επειδή } \frac{\alpha}{\beta} < 1 < \frac{\beta}{\alpha}, \text{ αρκεί } 1 - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\alpha} - 1 \Leftrightarrow$$

$$2 < \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 2\alpha\beta < \alpha\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} + \alpha\beta \cdot \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 0 < \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 > 0 \text{ ισχύει}$$

$$\eta) \frac{\alpha}{1 + \alpha} < \frac{\beta}{1 + \beta} \Leftrightarrow \alpha(1 + \beta) < \beta(1 + \alpha) \Leftrightarrow \alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ ισχύει}$$

$$\theta) \sqrt{\alpha + \beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Leftrightarrow (\sqrt{\alpha + \beta})^2 \leq (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \Leftrightarrow \alpha + \beta \leq (\sqrt{\alpha})^2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + (\sqrt{\beta})^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta \leq \alpha + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \beta \Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \text{ ισχύει}$$