10η Άσκηση

Πραγματικοί αριθμοί

Έστω $A=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^4+6x^2+9}+\sqrt{x^2-2x+1}-\left|-x^2-2\right|$.

α) Αν $1<x<2$, να δείξετε ότι $A=2$.

Έστω $x=1{,}3$.

β) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{A}}-\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{3}+\sqrt{A}}=5$

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha=\sqrt{A}+\sqrt{3A}$ και $\beta=\sqrt{3}+A$.

δ) Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{A+3}\cdot\sqrt{A+1}\cdot\sqrt[6]{A+3}=\sqrt{15}$

ε) $\sqrt[4]{A}\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt[4]{A\sqrt{A}}=2\sqrt[8]{2}$

Λύση

α) $A=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^4+6x^2+9}+\sqrt{x^2-2x+1}-\left|-x^2-2\right| \overset{-x^2-2<0}{\Leftrightarrow}$

$A=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{\left(x^2+3\right)^2}+\sqrt{(x-1)^2}-\left(x^2+2\right)=|x-2|+\left|x^2+3\right|+|x-1|-x^2-2$

Είναι $x>1 \Leftrightarrow x-1>0,\ x<2 \Leftrightarrow x-2<0$ και $x^2+3>0$ άρα

$A=-\cancel{x}+\cancel{2}+\cancel{x^2}+3+\cancel{x}-1-\cancel{x^2}-\cancel{2}=2$

β) Επειδή $1<1{,}3<2$, είναι $A=2$, οπότε:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{A}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{A}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$\frac{3+\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{6}}+2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{5}{3-2}=5$$

γ) Είναι $\alpha=\sqrt{A}+\sqrt{3A}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$ και $\beta=\sqrt{3}+A=\sqrt{3}+2$

$\alpha^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}\right)^2=2+2\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3}+6=8+4\sqrt{3}$

$\beta^2=\left(\sqrt{3}+2\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\cdot 2+2^2=3+4\sqrt{3}+4=7+4\sqrt{3}$

Είναι $\alpha^2>\beta^2$ και επειδή $\alpha,\beta>0$ είναι $\alpha>\beta$

δ) $\sqrt[3]{A+3}\cdot\sqrt{A+1}\cdot\sqrt[6]{A+3}=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{6}}3^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}3^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}}3^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{6}}3^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}=(5\cdot 3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{15}$

ε) $\sqrt[4]{A}\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt[4]{A\sqrt{A}}=\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}}=2^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2^{1+\frac{1}{2}}}=2^{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}\cdot\sqrt[4]{2^{\frac{3}{2}}}=2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{\frac{3}{2}}{4}}=2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{8}}=$

$2^{\frac{6}{8}+\frac{3}{8}}=2^{\frac{9}{8}}=2^{1+\frac{1}{8}}=2\cdot 2^{\frac{1}{8}}=2\sqrt[8]{2}$