

9η Άσκηση

Πραγματικοί αριθμοί

Δίνεται η παράσταση $A = |x|(1-x) - x|x-1|$, $x \neq 1$.

α) Αν $x = -2$:

i. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{A}$ και $\sqrt[3]{A^2}$.

ii. Να δείξετε ότι $\sqrt{A} \cdot \sqrt[3]{A^2} \cdot \sqrt[6]{48} = 24 \cdot \sqrt[3]{3}$

β) Αν $x > 1$, να δείξετε ότι:

i. $A < 0$

ii. $A - 6x - 4 < 0$

γ) Αν $A = 0$, να δείξετε ότι:

i. $0 < x < 1$

ii. $-1 < x - x^2 < 1$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Askisopolis

Λύση



α) Για $x = -2$ είναι $A = |-2|(1 - (-2)) - (-2)|-2 - 1| = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 12$

i. Είναι $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{12^3}$ και $\sqrt[3]{A^2} = A^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{4}{6}} = 12^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{12^4}$.
 $12^3 < 12^4 \Leftrightarrow \sqrt[6]{12^3} < \sqrt[6]{12^4}$

ii. $\sqrt{A} \cdot \sqrt[3]{A^2} \cdot \sqrt[6]{48} = \sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{12^2} \cdot \sqrt[6]{2^4 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{(2^2 \cdot 3)^2} \cdot \sqrt[6]{2^4 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot 2^{\frac{4}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} =$
 $2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 2 \cdot 2^{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = 2 \cdot 2^{\frac{6}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = 2 \cdot 2^2 \cdot 3^{\frac{8}{6}} = 8 \cdot 3^{\frac{4}{3}} = 8 \cdot 3^{1 + \frac{1}{3}} = 8 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 24 \cdot \sqrt[3]{3}$

β) i. Αν $x > 1$, είναι $x - 1 > 0$ και $x > 0$, οπότε:

$$A = x(1 - x) - x(x - 1) = x(1 - x) + x(1 - x) = 2x(1 - x) < 0$$

ii. $A - 6x - 4 < 0 \Leftrightarrow 2x(1 - x) - 6x - 4 < 0 \Leftrightarrow 2x - 2x^2 - 6x - 4 < 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 4x - 4 < 0 \Leftrightarrow$
 $x^2 + 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 1 > 0$ ισχύει γιατί $(x + 1)^2 \geq 0$
 ή $A - 6x - 4 < 0$ αφού $A < 0$ και $x > 0 \Leftrightarrow -6x < 0 \Leftrightarrow -6x - 4 < -4 < 0$

γ) i. $A = 0 \Leftrightarrow |x|(1 - x) - x|x - 1| = 0 \Leftrightarrow |x|(1 - x) = x|x - 1| \Leftrightarrow \frac{|x|}{|x - 1|} = \frac{x}{1 - x} \Leftrightarrow \frac{|x|}{|1 - x|} = \frac{x}{1 - x} \Leftrightarrow$
 $\left| \frac{x}{1 - x} \right| = \frac{x}{1 - x} \Leftrightarrow \frac{x}{1 - x} > 0 \Leftrightarrow \{x > 0 \text{ και } 1 - x > 0 \text{ ή } x < 0 \text{ και } 1 - x < 0\} \Leftrightarrow \{0 < x < 1 \text{ ή αδύνατο}\}$
 άρα $0 < x < 1$.

ii. $0 < x < 1$ (1) $\Leftrightarrow 0 < x^2 < 1 \Leftrightarrow 0 > -x^2 > -1 \Leftrightarrow -1 < -x^2 < 0$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $-1 < x - x^2 < 1$

