

8η Άσκηση

Πραγματικοί αριθμοί

Έστω η παράσταση $A = \alpha + \frac{4}{\alpha}$, $\alpha > 0$.

α) Να δείξετε ότι $A \geq 4$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{(\alpha^2 + 4)(\beta^2 + 4)}{\alpha\beta} \geq 16$.

γ) Αν $\alpha \in (4, 8)$, να δείξετε ότι $4,5 < A < 9$

δ) Αν $A = 4$ να δείξετε ότι για κάθε $x > \alpha$ είναι $|x+1| - |2-x| = 3$

ε) Έστω $\alpha = \sqrt{5} - 1$, να δείξετε ότι:

i. $A = 2\sqrt{5}$

ii. $\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[6]{2500} \cdot \sqrt[12]{400} = 10$



Λύση

$$\alpha) A \geq 4 \Leftrightarrow \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha + \cancel{\alpha} \cdot \frac{4}{\cancel{\alpha}} \geq 4 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

$$\beta) \text{ Είναι } \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + 4}{\alpha} \geq 4 \text{ και } \frac{\beta^2 + 4}{\beta} \geq 4, \text{ οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε:}$$

$$\frac{\alpha^2 + 4}{\alpha} \cdot \frac{\beta^2 + 4}{\beta} \geq 4 \cdot 4 \Leftrightarrow \frac{(\alpha^2 + 4)(\beta^2 + 4)}{\alpha\beta} \geq 16$$



$$\gamma) \alpha \in (4, 8) \Leftrightarrow 4 < \alpha < 8 \quad (1) \Leftrightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{8}^2} < 4 \cdot \frac{1}{\alpha} < \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{4}{\alpha} < 1 \quad (2).$$

$$\text{Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) έχουμε: } 4 + \frac{1}{2} < \alpha + \frac{4}{\alpha} < 8 + 1 \Leftrightarrow 4,5 < A < 9$$

$$\delta) A = 4 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Για κάθε $x > 2$ είναι $x + 1 > 3 \Rightarrow x + 1 > 0$ και $x > 2 \Leftrightarrow 0 > 2 - x$, άρα

$$|x + 1| - |2 - x| = x + 1 - (-2 + x) = \cancel{x} + 1 + 2 - \cancel{x} = 3$$

$$\epsilon) \text{ i. } A = \sqrt{5} - 1 + \frac{4}{\sqrt{5} - 1} = \sqrt{5} - 1 + \frac{4(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \sqrt{5} - 1 + \frac{4(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \sqrt{5} - 1 + \frac{4(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} \Leftrightarrow$$

$$A = \sqrt{5} - 1 + \frac{\cancel{4}(\sqrt{5} + 1)}{\cancel{4}} = \sqrt{5} - \cancel{1} + \sqrt{5} + \cancel{1} = 2\sqrt{5}$$



$$\text{ii. } \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[6]{2500} \cdot \sqrt[12]{400} = \sqrt[3]{2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{5^4 \cdot 2^2} \cdot \sqrt[12]{2^4 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{2 \cdot 5^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt[6]{5^4 \cdot 2^2} \cdot \sqrt[12]{2^4 \cdot 5^2} =$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5^{\frac{1}{2}}} \cdot 5^{\frac{4}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{6}} \cdot 2^{\frac{4}{12}} \cdot 5^{\frac{2}{12}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{\frac{1}{2}}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = 2 \cdot 5^{\frac{6}{6}} = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\text{ή } \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[6]{2500} \cdot \sqrt[12]{400} = \sqrt[3]{2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{2500} \cdot \sqrt[12]{20^2} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 5}} \cdot \sqrt[6]{2500 \cdot 20} =$$

$$\sqrt[6]{4 \cdot 5} \cdot \sqrt[6]{50000} = \sqrt[6]{4 \cdot 5 \cdot 50000} = \sqrt[6]{1000000} = 10$$



Λύση