

**9η Άσκηση****Ρίζες πραγματικών αριθμών**

Έστω οι αριθμοί  $\alpha = 2 - \sqrt{3}$  και  $\beta = 2 + \sqrt{3}$

**α)** Να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$ .

**β)** Να δείξετε ότι  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \alpha$ .

**γ)** Να δείξετε ότι  $\beta > \sqrt{2} + \sqrt{5} > 2\alpha$ .

**δ)** Να μετατρέψετε το κλάσμα  $\frac{2\sqrt{2}-6}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}-3\alpha}$  σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

**ε)** Να βρείτε τα αναπτύγματα  $\alpha^3$  και  $\beta^3$  και στη συνέχεια να δείξετε ότι  $\frac{1}{\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} = 4$ .

**στ)** Να δείξετε ότι  $\alpha\sqrt{\beta} - \beta\sqrt{\alpha} - \alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta} = 4\sqrt{2}$ .

**ζ)** Αν  $\gamma \geq 0$  να δείξετε ότι  $\alpha + \beta + \gamma + 12\alpha\beta > 4(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})$ .

Στέλιος Μιχαήλογλου

## Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) A &= \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \stackrel{A>0}{\Leftrightarrow} A^2 = \left( \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2 \Leftrightarrow \\ A^2 &= \left( \sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^2 - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} + \left( \sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2 = 2 + \cancel{\sqrt{3}} - 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2 - \cancel{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \\ A^2 &= 4 - 2\sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 4 - 2\sqrt{4-3} = 4 - 2 = 2 \Leftrightarrow A = \sqrt{2} \end{aligned}$$

**β) 1ος τρόπος**

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}{1} = 2-\sqrt{3} = \alpha$$

**2ος τρόπος**

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \alpha \stackrel{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right)^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \alpha^2 \stackrel{:\alpha}{\Leftrightarrow} \cancel{\alpha} = \alpha^2 \beta \Leftrightarrow \alpha\beta = 1 \text{ ισχύει}$$

**3ος τρόπος**

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\alpha \cdot \frac{1}{\beta}} = \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{\alpha^2} = \alpha \text{ αφού } \alpha > 0.$$

$$\begin{aligned} \gamma) \beta &> \sqrt{2} + \sqrt{5} \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^2 > (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 > (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow \\ 4 + 4\sqrt{3} + 3 &> 2 + 2\sqrt{10} + 5 \Leftrightarrow \cancel{7} + 4\sqrt{3} > \cancel{7} + 2\sqrt{10} \Leftrightarrow \cancel{4}^2 \sqrt{3} > \cancel{2}^2 \sqrt{10} \Leftrightarrow \\ (2\sqrt{3})^2 &> (\sqrt{10})^2 \Leftrightarrow 12 > 10 \text{ ισχύει} \end{aligned}$$

**1ος τρόπος**

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \sqrt{5} &> 4 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 > (4 - 2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 > 16 - 16\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \\ 2 + 2\sqrt{10} + 5 &> 16 - 16\sqrt{3} + 12 \Leftrightarrow 2\sqrt{10} + 16\sqrt{3} > 18 \stackrel{:2}{\Leftrightarrow} \sqrt{10} + 8\sqrt{3} > 9 \Leftrightarrow \\ (\sqrt{10} + 8\sqrt{3})^2 &> 9^2 \Leftrightarrow (\sqrt{10})^2 + 16\sqrt{10}\sqrt{3} + (8\sqrt{3})^2 > 81 \Leftrightarrow 10 + 16\sqrt{30} + 192 > 81 \Leftrightarrow \\ 16\sqrt{30} &> -121 \text{ ισχύει} \end{aligned}$$

**2ος τρόπος**

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \sqrt{5} &> 4 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{2} + \sqrt{5} + 2\sqrt{3} > 4 \text{ ισχύει αφού} \\ \sqrt{2} > 1, \sqrt{5} > 2 \text{ και } 2\sqrt{3} > 2 \text{ οπότε } \sqrt{2} + \sqrt{5} + 2\sqrt{3} &> 5 > 4 \end{aligned}$$

$$\delta) \frac{2\sqrt{2}-6}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}-3\alpha} = \frac{2(\sqrt{2}-3)}{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})-3(2-\sqrt{3})} = \frac{2(\cancel{\sqrt{2}-3})}{(2-\sqrt{3})(\cancel{\sqrt{2}-3})} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2(2+\sqrt{3})$$

$$\epsilon) \alpha^3 = (2-\sqrt{3})^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \sqrt{3} + 3 \cdot 2 (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$$

$$\beta^3 = (2+\sqrt{3})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \sqrt{3} + 3 \cdot 2 (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = 8 + 12\sqrt{3} + 18 + 3\sqrt{3} = 26 + 15\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\beta^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^3}} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha\beta} + \frac{\beta}{\alpha\beta} = \alpha + \beta = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

στ)  $\alpha\sqrt{\beta} - \beta\sqrt{\alpha} - \alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\sqrt{\beta}(\alpha + \beta) - \sqrt{\alpha}(\alpha + \beta) = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \cancel{\sqrt{\beta}} - \cancel{\sqrt{\alpha}} = \cancel{\sqrt{2}} \stackrel{:4}{\Leftrightarrow} \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = \sqrt{2}$  ισχύει από το α σκέλος

ζ)  $\alpha + \beta + \gamma + 12\alpha\beta > 4(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}) \Leftrightarrow$

$\alpha + \beta + \gamma + 12 > 4\sqrt{\alpha} + 4\sqrt{\beta} + 4\sqrt{\gamma} \Leftrightarrow$

$\alpha - 4\sqrt{\alpha} + 4 + \beta - 4\sqrt{\beta} + 4 + \gamma - 4\sqrt{\gamma} + 4 > 0 \Leftrightarrow$

$(\sqrt{\alpha} - 2)^2 + (\sqrt{\beta} - 2)^2 + (\sqrt{\gamma} - 2)^2 > 0$  ισχύει γιατί  $(\sqrt{\alpha} - 2)^2 > 0$ ,  $(\sqrt{\beta} - 2)^2 > 0$  και  $(\sqrt{\gamma} - 2)^2 \geq 0$

