

6η Άσκηση

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ

α) Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να δείξετε ότι η παράσταση $A = |\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| - |\gamma - \alpha|$ έχει σταθερή τιμή.

β) Αν $\gamma \in (2, 3)$, να δείξετε ότι η παράσταση $B = ||2\gamma - 6| - 2| + 2\gamma$ έχει σταθερή τιμή.

γ) Να γράψετε τη παράσταση $\Pi = 3 - |\alpha - 1|$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

δ) Αν $|\alpha| < 2$ και $|\beta| < 1$, να δείξετε ότι $|\alpha - 2\beta| < 4$.

ε) Αν $(|\alpha| - 2)(2 - |\beta|) > 0$ και $|\alpha - \beta| \geq 2|\alpha|$, να δείξετε ότι $-2 < \alpha < 2$ και $d(\beta, 0) > 2$

στ) Αν $d(\alpha, 0) < 1$ και $d(\beta, 0) < 1$ και $\alpha\beta \neq -1$, να δείξετε ότι $d\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, 0\right) < 1$

ζ) Αν $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$, να δείξετε ότι:

i. $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (|\alpha| + |\beta|)^2$

ii. $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\alpha| + |\beta|} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{|\beta| + |\gamma|} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{|\gamma| + |\alpha|} \geq |\alpha + \beta + \gamma|$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Είναι $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$, $\beta < \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma < 0$, $\alpha < \gamma \Leftrightarrow 0 < \gamma - \alpha$, οπότε:

$$A = |\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| - |\gamma - \alpha| = -\alpha + \beta - \beta + \gamma - (\gamma - \alpha) = -\alpha + \gamma - \gamma + \alpha = 0$$

β) Επειδή $\gamma \in (2, 3)$, είναι $\gamma < 3 \Leftrightarrow 2\gamma < 6 \Leftrightarrow 2\gamma - 6 < 0$, οπότε:

$$B = |2\gamma - 6| - 2 = -2\gamma + 6 - 2 = -2\gamma + 4 = 4 - 2\gamma$$

Επειδή $\gamma \in (2, 3)$, είναι $\gamma > 2 \Leftrightarrow 2\gamma > 4 \Leftrightarrow 0 > 4 - 2\gamma$, οπότε: $B = -4 + 2\gamma - 2\gamma = -4$

γ) Αν $\alpha \geq 1$ τότε $\alpha - 1 \geq 0$ και $\Pi = 3 - (\alpha - 1) = 3 - \alpha + 1 = 4 - \alpha$

Αν $\alpha < 1$ τότε $\alpha - 1 < 0$ και $\Pi = 3 - (-\alpha + 1) = 3 + \alpha - 1 = 2 + \alpha$

δ) Είναι $|\alpha - 2\beta| \leq |\alpha| + |-2\beta| = |\alpha| + 2|\beta|$ (1)

Είναι $|\alpha| < 2$ (2), $|\beta| < 1 \Leftrightarrow 2|\beta| < 2$ (3) και με πρόσθεση κατά μέλη των (2),(3) προκύπτει:

$$|\alpha| + 2|\beta| < 4 \text{ και λόγω της σχέσης (1): } |\alpha - 2\beta| \leq |\alpha| + 2|\beta| < 4$$

ε) Επειδή $(|\alpha| - 2)(2 - |\beta|) > 0$, οι αριθμοί $|\alpha| - 2$ και $2 - |\beta|$ είναι ομόσημοι, δηλαδή:

$$\begin{cases} |\alpha| - 2 > 0 \\ 2 - |\beta| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| > 2 \\ |\beta| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow |\beta| < 2 < |\alpha| \text{ ή } \begin{cases} |\alpha| - 2 < 0 \\ 2 - |\beta| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| < 2 \\ |\beta| > 2 \end{cases} \Leftrightarrow |\alpha| < 2 < |\beta| \quad (4)$$

Είναι $|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ και $|\alpha - \beta| \geq 2|\alpha|$, άρα

$$2|\alpha| \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Rightarrow 2|\alpha| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow 2|\alpha| - |\alpha| \leq |\beta| \Leftrightarrow |\alpha| \leq |\beta| \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (4), (5) προκύπτει ότι $|\alpha| < 2 < |\beta| \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| < 2 \\ |\beta| > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < \alpha < 2 \\ d(\beta, 0) > 2 \end{cases}$

$$\text{στ)} d\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, 0\right) < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|\alpha + \beta|}{|1 + \alpha\beta|} < 1 \Leftrightarrow |\alpha + \beta| < |1 + \alpha\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 < |1 + \alpha\beta|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta)^2 < (1 + \alpha\beta)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 < 1 + 2\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 1 - \alpha^2\beta^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2(1 - \beta^2) + \beta^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha^2(1 - \beta^2) - (1 - \beta^2) < 0 \Leftrightarrow (1 - \beta^2)(\alpha^2 - 1) < 0 \text{ που ισχύει αφού}$$

$$d(\alpha, 0) < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1 \Leftrightarrow |\alpha|^2 < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 < 0 \text{ και } d(\beta, 0) < 1 \Leftrightarrow |\beta| < 1 \Leftrightarrow |\beta|^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - |\beta|^2$$

$$\text{ζ) i. } 2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 - |\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| - |\beta|^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$|\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

$$\text{ii. Είναι } 2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{2(|\alpha| + |\beta|)} \geq \frac{(|\alpha| + |\beta|)^2}{2(|\alpha| + |\beta|)} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\alpha| + |\beta|} \geq \frac{|\alpha| + |\beta|}{2} \quad (6) \text{ και όμοια}$$

$$\frac{\beta^2 + \gamma^2}{|\beta| + |\gamma|} \geq \frac{|\beta| + |\gamma|}{2} \quad (7), \quad \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{|\gamma| + |\alpha|} \geq \frac{|\gamma| + |\alpha|}{2} \quad (8)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (6),(7),(8), έχουμε:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\alpha| + |\beta|} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{|\beta| + |\gamma|} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{|\gamma| + |\alpha|} \geq \frac{|\alpha| + |\beta|}{2} + \frac{|\beta| + |\gamma|}{2} + \frac{|\gamma| + |\alpha|}{2} = \frac{2|\alpha| + 2|\beta| + 2|\gamma|}{2} = \frac{2(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\alpha| + |\beta|} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{|\beta| + |\gamma|} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{|\gamma| + |\alpha|} \geq |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \quad (9)$$

$$\text{Είναι } |\alpha + \beta + \gamma| = |(\alpha + \beta) + \gamma| \leq |\alpha + \beta| + |\gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \quad (10)$$

$$\text{Από (9), (10): } \frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\alpha| + |\beta|} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{|\beta| + |\gamma|} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{|\gamma| + |\alpha|} \geq |\alpha + \beta + \gamma|$$



Askisopolis