

1η Άσκηση

Πραγματικοί αριθμοί

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β .

α) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = 2[3(\alpha - \beta) - 4(\alpha - 2\beta)] + 3[\alpha(1 - \beta) + \beta(1 + \alpha)] \quad \text{για } \alpha = -1 \text{ και } \beta = \frac{1}{13}.$$

β) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$B = (\alpha^{-2}\beta^{-1})^{-6} \cdot \left[(\alpha^2\beta)^{-1} : (\alpha\beta^2)^{-2} \right]^2 \quad \text{όταν } \alpha = \frac{5}{3} \text{ και } \beta = 0,6.$$

γ) Να δείξετε ότι $2(\alpha - 3)^3 + 36(\alpha^2 + 3) - 2(\alpha + 3)^3 = 0$.

δ) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $\Gamma = 2 \cdot 27^3 + 108 \cdot 301 - 2 \cdot 33^3$

ε) Αν $2\alpha + \beta = 1$ να δείξετε ότι $2\alpha^2 + \beta^2 + 3\alpha\beta - \alpha = 1$.

στ) Αν οι α, β είναι άρτιοι, να δείξετε ότι και ο $\alpha + \beta$ είναι άρτιος.

ζ) Αν οι α, β είναι διαδοχικοί ακέραιοι, τότε ο $\alpha \cdot \beta$ είναι άρτιος.

η) Αν $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{2}$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \frac{2\alpha^2 - 4\alpha\beta - 5\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$

θ) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $\frac{\alpha^2 + 3\alpha}{2\alpha^2 + 3\alpha} \cdot \frac{4\alpha^2 - 9}{4\alpha^2 - 12\alpha + 9}$

ii. $\frac{\beta^2 - 4}{\beta^3 + 8} : \frac{\beta - 2}{\beta^2 - 2\beta + 4}$



Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς



Λύση

$$\alpha) A = 2[3(\alpha - \beta) - 4(\alpha - 2\beta)] + 3[\alpha(1 - \beta) + \beta(1 + \alpha)] \Leftrightarrow$$

$$A = 2(3\alpha - 3\beta - 4\alpha + 8\beta) + 3(\alpha - \cancel{\alpha\beta} + \beta + \cancel{\alpha\beta}) = 2(-\alpha + 5\beta) + 3(\alpha + \beta) \Leftrightarrow$$

$$A = -2\alpha + 10\beta + 3\alpha + 3\beta = \alpha + 13\beta = -1 + \cancel{13} \cdot \frac{1}{\cancel{13}} = -1 + 1 = 0$$



$$\beta) B = (\alpha^{-2}\beta^{-1})^{-6} \cdot \left[(\alpha^2\beta)^{-1} : (\alpha\beta^2)^{-2} \right]^2 = (\alpha^{-2})^{-6} (\beta^{-1})^{-6} \left[\frac{(\alpha^2)^{-1}\beta^{-1}}{\alpha^{-2}(\beta^2)^{-2}} \right]^2 =$$

$$= \alpha^{12}\beta^6 \left[\frac{\alpha^{-2}\beta^{-1}}{\alpha^{-2}\beta^{-4}} \right]^2 = \alpha^{12}\beta^6 (\beta^{-1+4})^2 = \alpha^{12}\beta^6 (\beta^3)^2 = \alpha^{12}\beta^6\beta^6 = \alpha^{12}\beta^{12} = (\alpha\beta)^{12}$$

$$\text{Όμως } \alpha = \frac{5}{3} \text{ και } \beta = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \text{ οπότε } \alpha\beta = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1, \text{ άρα } A = 1^{12} = 1.$$

$$\gamma) 2(\alpha - 3)^3 + 36(\alpha^2 + 3) - 2(\alpha + 3)^3 = 2(\alpha^3 - 9\alpha^2 + 27\alpha - 27) + 36\alpha^2 + 108 - 2(\alpha^3 + 9\alpha^2 + 27\alpha + 27) =$$

$$\cancel{2\alpha^3} - 18\alpha^2 + \cancel{54\alpha} - 54 + 36\alpha^2 + 108 - \cancel{2\alpha^3} - 18\alpha^2 - \cancel{54\alpha} - 54 = -36\alpha^2 + 36\alpha^2 + 108 - 108 = 0$$

δ) Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη ισότητα $\alpha = 30$ προκύπτει:

$$2(30 - 3)^3 + 36(30^2 + 3) - 2(30 + 3)^3 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 27^3 + 36 \cdot 903 - 2 \cdot 33^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 27^3 + 36 \cdot 3 \cdot 301 - 2 \cdot 33^3 = 0 \Leftrightarrow \Gamma = 0$$

ε) Είναι $2\alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 - 2\alpha$, τότε αντικαθιστώντας στο 1° μέλος της ισότητας που θέλουμε να

$$\text{αποδείξουμε προκύπτει: } 2\alpha^2 + \beta^2 + 3\alpha\beta - \alpha = 2\alpha^2 + (1 - 2\alpha)^2 + 3\alpha(1 - 2\alpha) - \alpha =$$

$$\cancel{2\alpha^2} + 1 - \cancel{4\alpha} + \cancel{4\alpha^2} + \cancel{3\alpha} - \cancel{6\alpha^2} - \alpha = 1$$

στ) Έστω $\alpha = 2\kappa$, $\beta = 2\lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$. Τότε $\alpha + \beta = 2\kappa + 2\lambda = 2\left(\underbrace{\kappa + \lambda}_{p \in \mathbb{Z}}\right) = 2p = \text{άρτιος}$

ζ) Επειδή οι δύο ακέραιοι είναι διαδοχικοί ο ένας θα είναι άρτιος και ο άλλος περιττός, δηλαδή 2κ και $2\kappa + 1$ ή $2\kappa - 1$. Το γινόμενο τους είναι $2\kappa \underbrace{(2\kappa \pm 1)}_{\mu \in \mathbb{Z}} = 2\mu = \text{άρτιος}$

η) $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\alpha = \beta$. Τότε

$$A = \frac{2\alpha^2 - 4\alpha(-2\alpha) - 5(-2\alpha)^2}{\alpha^2 + (-2\alpha)^2} = \frac{2\alpha^2 + 8\alpha^2 - 20\alpha^2}{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \frac{-10\alpha^2}{5\alpha^2} = -2$$



$$\theta) \text{ i. } \frac{\alpha^2 + 3\alpha}{2\alpha^2 + 3\alpha} \cdot \frac{4\alpha^2 - 9}{4\alpha^2 - 12\alpha + 9} = \frac{(\alpha^2 + 3\alpha)(4\alpha^2 - 9)}{(2\alpha^2 + 3\alpha)(4\alpha^2 - 12\alpha + 9)}$$

$$\alpha^2 + 3\alpha = \alpha(\alpha + 3), \quad 4\alpha^2 - 9 = (2\alpha)^2 - 3^2 = (2\alpha - 3)(2\alpha + 3),$$

$$2\alpha^2 + 3\alpha = \alpha(2\alpha + 3), \quad 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = (2\alpha)^2 - 2 \cdot 2\alpha \cdot 3 + 3^2 = (2\alpha - 3)^2$$

$$\text{Αρ}\alpha \frac{(\alpha^2 + 3\alpha)(4\alpha^2 - 9)}{(2\alpha^2 + 3\alpha)(4\alpha^2 - 12\alpha + 9)} = \frac{\cancel{\alpha}(\alpha + 3)\cancel{(2\alpha - 3)}\cancel{(2\alpha + 3)}}{\cancel{\alpha}\cancel{(2\alpha + 3)}(2\alpha - 3)^2} = \frac{\alpha + 3}{2\alpha - 3}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \frac{\beta^2 - 4}{\beta^3 + 8} \cdot \frac{\beta - 2}{\beta^2 - 2\beta + 4} &= \frac{\beta^2 - 4}{\beta^3 + 8} \cdot \frac{\beta^2 - 2\beta + 4}{\beta - 2} = \frac{(\beta^2 - 2^2)(\beta^2 - 2\beta + 4)}{(\beta^3 + 2^3)(\beta - 2)} = \\ &= \frac{\cancel{(\beta - 2)}\cancel{(\beta + 2)}\cancel{(\beta^2 - 2\beta + 4)}}{\cancel{(\beta + 2)}\cancel{(\beta^2 - 2\beta + 4)}\cancel{(\beta - 2)}} = 1 \end{aligned}$$

