Ασκήσεις στους πραγματικούς αριθμούς

**Αναλογίες**

**2ο θέμα**

1. **(2-1251)**

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με β ≠ 0 και δ ≠ γ ώστε να

ισχύουν:  και 

**α)** Να αποδείξετε ότι α=3β και δ=5γ (Μονάδες 10)

**β)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης: (Μονάδες 15)

1. **(2.1254)**

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει:

 **α)** Να αποδείξετε ότι:. (Μονάδες 12)

 **β)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : (Μονάδες 13)

1. **(2.1318)**

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με α ≠β για τους

οποίους ισχύει:

**α)** Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

**β)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  (Μονάδες 12)

**Διάταξη πραγματικών αριθμών**

**2ο θέμα**

1. **(2.1287)**

Δίνονται οι παραστάσεις:και .

**α)** Να δείξετε ότι:, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)

**β)** Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα ; Να αιτιολογήσετε την

 απάντησή σας. (Μονάδες 13)

1. **(2.1317)**

**α)** Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς *x, y*

ισχύει: ** (Μονάδες 12)

**β)** Να βρείτε τους αριθμούς *x, y* ώστε: ** (Μονάδες 13)

1. **(2.1317)**

Δίνονται οι παραστάσεις: 

**α)** Να δείξετε ότι:  (Μονάδες 3)

**β)** Να δείξετε ότι:, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 10)

**γ)** Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα; Να αιτιολογήσετε την

απάντησή σας. (Μονάδες 12)

1. **(2.1373)**

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με. Να αποδείξετε ότι:

**α)**  (Μονάδες 12)

**β)**  (Μονάδες 13)

1. **(2.1368)**

Αν  , να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η

τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

**α)** (Μονάδες 5)

**β)** (Μονάδες 10)

**γ)**   (Μονάδες 10)

1. **(2.1324)**

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς *x* και *y* ισχύουν:,

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

**α)**   (Mονάδες 12)

**β)**   (Μονάδες 13)

1. **(2.1314)**

 Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν: 

 Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις

 παραστάσεις:

 **α) ** (Μονάδες 12)

 **β)** α2 - 2αβ (Μονάδες 13)

1. **(2.1352)**

Αν  , τότε

**α)** να αποδείξετε ότι:  (Μονάδες 13)

**β)** να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

(Μονάδες 12

1. **(2.1298)**

 Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά,

αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει:  τότε:

**α)** Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του

 ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

**β)** Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των

 οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου

 παραλληλογράμμου. (Μονάδες 15)

1. **(2.1261)**

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς *y*.

**α)** Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ

 που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: Π = 2*x* + 4*y* (Μονάδες 10)

 **β)** Αν ισχύει, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή

 της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

 (Μονάδες 15)

**Απόλυτη τιμή**

**2ο θέμα**

1. **(2.1300)**

 **α)** Να αποδείξετε ότι ,για κάθε πραγματικό x.

(Μονάδες 10)

 **β)** Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση :

 

(Μονάδες 15)

1. **(2.1239)**

Δίνεται η παράσταση: Α = |3x – 6| + 2 ,όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

 **α)** Να αποδείξετε ότι

  **i) **

  **ii)** 

 (Μονάδες 12)

 **β)** Αν για τον x ισχύει ότι να αποδείξετε ότι: 

 (Μονάδες 13)

1. **(2.1258)**

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα,

**α)** να γράψετε τις παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.(Μονάδες 10)

**β)** να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  (Μονάδες 15)

1. **(2.1322)**

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: .

**α)** Να αποδείξετε ότι. (Μονάδες 12)

**β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση:  . (Μονάδες 13)

1. (2.1323)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y για τους οποίους ισχύει: 

**α)** Nα αποδείξετε ότι : 

(Μονάδες 12)

**β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση : . (Μονάδες 13)

1. **(2.1253)**

**α)** Να λύσετε την ανίσωση : 

(Μονάδες 10)

**β)** Αν κάποιος αριθμός επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση , να αποδείξετε ότι :

 . (Μονάδες 15)

1. **(2.1303)**

Δίνονται οι παραστάσεις:  και , όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

**α)** Για κάθε  ,να αποδείξετε ότι :.

(Μονάδες 16)

**β)** Υπάρχει ώστε να ισχύει ;Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας .

(Μονάδες 9)

1. **(2.1260)**

Δίνεται η παράσταση: 

**α)** Για, να δείξετε ότι:  (Μονάδες 3)

**β)** Για, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x),

 την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12).

1. **(2.1384)**

Δίνεται η παράσταση:,

για τους οποίους ισχύει: Να αποδείξετε ότι:

**α) ** (Μονάδες 12)

**β)** 0 < A < 4 . (Μονάδες 13)

1. **(2.1284)**

**α)** Nα λύσετε την ανίσωση 

(Μονάδες 12)

**β)** Αν , να γράψετε την παράσταση χωρίς απόλυτες τιμές.

Να αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

1. **(2.1272)**

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: .Να δείξετε ότι:

**α)**  (Μονάδες 10)

**β)** . (Μονάδες 15)

1. **(2.1320)**

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: .

**α)** Να αποδείξετε ότι  (Μονάδες 12)

**β)** Αν  , να αποδείξετε ότι η παράσταση: 

 είναι ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

1. **(2.1342)**

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει |2x -1| < 1, τότε:

**α)** Να αποδείξετε ότι 0 < x < 1 (Μονάδες 15)

**β)** Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

 1, x, x2.Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

1. **(2.1366)**

 **α)**  Αν, να αποδειχθεί ότι: (Μονάδες 15)

**β)**  Αν , να αποδειχθεί ότι:  (Μονάδες 10)

1. **(2.1371)**

**α)** Αν α, β ∈ℝ-{0}, να αποδειχθεί ότι:  (1) (Μονάδες 15)

**β)**  Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

 (Μονάδες 10)

1. **(2.1248)**

**α)** Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : 

 (Μονάδες 12)

**β)** Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με

 τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή

 του εμβαδού Ε του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

1. **(2.1252)**

**α)** Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : 

 (Μονάδες 12)

 Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με

 ,

**β)** τότε να αποδείξετε ότι:, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

**γ)** τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του

 ορθογωνίου.

 (Μονάδες 13)

1. **(2.1268)**

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: 

**α)** Να δείξετε ότι:  (Μονάδες 12)

**β)** Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η

 περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y (Μονάδες 13)

**4ο θέμα**

1. **(4.1515)**

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

****

**α)** Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β. (Μονάδες 13)

**β)** Αν επιπλέον, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε

 αλγεβρικά (Μονάδες 12)

1. **(4.1525)**

 Για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει ότι

* + 
	+ 

**α)** Να αποδειχθεί ότι  (Μονάδες 4)

**β)** Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β . (Μονάδες 5)

**γ)** Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση 2α-3β . (Μονάδες 7)

**δ)** Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση . (Μονάδες 9)

1. **(4.1521)**

**α)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει  .

(Μονάδες 10)

**β)** Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόσταση του από το 4 στον άξονα των

 πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2 .

 **i)** Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι

 μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14 .

(Μονάδες 5)

 **ii)** Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το

 19 . (Μονάδες 10 )

1. **(4.1427)**

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση :

**α)** Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

**β)** Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή

διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. (Μονάδες 5)

**γ)** Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε

με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

**δ)** Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

  (Μονάδες 5)

1. **(4.1428)**

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των

πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με 

**α)** Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

 **i)**  (Μονάδες 4)

 **ii)** | x-7| (Μονάδες 4)

**β)** Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του

αθροίσματος (Μονάδες 5)

**γ)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης γεωμετρικά.

 (Μονάδες 5)

**δ)** Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

 (Μονάδες 7)

1. **(4.1429)**

Σε έναν άξονα τα σημεία Α , Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9

και x αντίστοιχα.

**α)** Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων |x-5| και |x-9|.

 (Μονάδες 10)

**β)** Αν ισχύει 

 **i)** Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε

 την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

 **ii)** Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που

 παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την

 απάντησή σας. (Μονάδες 8)

**Ρίζες**

**2ο θέμα**

1. **(2.1375)**

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

  ≅ 1,41

  ≅ 1,73

  ≅ 2,24

  ≅ 2,64

 **α)**  Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα

 (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση

εκατοστού τους αριθμούς  (Μονάδες 12)

 **β)** Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα

 μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης 

 (Μονάδες 13)

1. **(2.1340)**

Αν είναι  , τότε:

**α)** Να αποδείξετε ότι. (Μονάδες 12)

**β)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Π = Α2+Β2. (Μονάδες 13)

1. **(2.1308)**

Δίνεται η παράσταση: 

**α)** Να δείξετε ότι  (Μονάδες 12)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση : .

 (Μονάδες 13)

1. **(2.1375)**

Δίνεται η παράσταση: 

**α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την

 απάντησή σας. (Μονάδες 12)

**β)** Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

 (Μονάδες 13)

1. **(2.1378)**

Δίνεται η παράσταση:

**α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την

απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή

διαστήματος. (Μονάδες 13)

 **β)** Για,να αποδείξετε ότι: Α2+Α-6=0 (Μονάδες 12)

1. **(2.1379)**

Δίνεται η παράσταση:

**α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την

απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή

διαστήματος. (Μονάδες 13)

**β)** Για,να αποδείξετε ότι:  (Μονάδες 12)

1. **(2.1380)**

Δίνεται η παράσταση:

 **α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την

 απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή

 διαστήματος. (Μονάδες 13)

 **β)** Για,να αποδείξετε ότι:  (Μονάδες 12)

1. **(2.1381)**

Δίνεται η παράσταση:

**α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την

 απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή

 διαστήματος. (Μονάδες 13)

**β)** Για,να αποδείξετε ότι:  (Μονάδες 12)

1. **(2.1335)**

Δίνονται οι παραστάσεις: και  όπου x

πραγματικός αριθμός

**α)**  Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; (Μονάδες 7)

**β)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; (Μονάδες 8)

**γ)** Να δείξετε ότι, για κάθε (Μονάδες 10)

1. **(2.1270)**

Δίνεται η παράσταση:

**α)**  Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η

 παράσταση Κ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

**β)** Αν, να αποδείξετε ότι παράσταση Κ σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη

 του x. (Μονάδες 13)

1. **(2.1377)**

**α)** Να δείξετε ότι : 

**β)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς 

1. **(2.1382)**

Δίνονται οι αριθμοί:  και 

**α)** Να δείξετε ότι:  (Μονάδες 13)

**β)** Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

 (Μονάδες 12)

1. **(2.1281)**

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: και 

**α)** Να δείξετε ότι: Α+Β+Γ=23 (Μονάδες 13)

**β)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς: και 

 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

1. **(2.1338)**

Αν είναι  και  , τότε:

**α)** Να αποδείξετε ότι  (Μονάδες 15)

**β)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β . (Μονάδες 10)