

## 4η Άσκηση

### Διάταξη πραγματικών αριθμών

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$

**α)** Να δείξετε ότι  $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

**β)** Να δείξετε ότι:

**i.**  $\alpha^2 - 6\alpha + 10 > 0$

**ii.**  $2\beta^2 - 2\beta + 1 > 0$

**iii.**  $\alpha^2 + 2\beta^2 + 11 > 2(3\alpha + \beta)$

**γ)** Να δείξετε ότι:  $\alpha^2 + \beta^2 + 50 \geq 10(\alpha + \beta)$

**δ)** Να αποδείξετε ότι:  $2\alpha^4 + 1 \geq 2\alpha^3 + \alpha^2$ .

**ε)** Αν  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ , να δείξετε ότι:

**i.**  $\alpha \leq 1$

**ii.**  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \leq 1$

**στ)** Αν  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  με  $\alpha\beta\gamma \leq 1$ , να δείξετε ότι:

**i.**  $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$

**ii.**  $\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \geq 8$

Στέλιος Μιχαήλογλου

## Λύση

**α)**  $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow$

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

**β) i.**  $\alpha^2 - 6\alpha + 10 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 1 > 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 + 1 > 0 \text{ ισχύει αφού } (\alpha - 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 + 1 \geq 1 > 0$

**ii.**  $2\beta^2 - 2\beta + 1 > 0 \Leftrightarrow \beta^2 + \beta^2 - 2\beta + 1 > 0 \Leftrightarrow \beta^2 + (\beta - 1)^2 > 0 \text{ ισχύει αφού } \beta^2 \geq 0, (\beta - 1)^2 \geq 0 \text{ και οι}$   
 παραστάσεις  $\beta, \beta - 1$  δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα.

**iii.** Είναι  $\alpha^2 - 6\alpha + 10 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 10 > 6\alpha \quad (1), \quad 2\beta^2 - 2\beta + 1 > 0 \Leftrightarrow 2\beta^2 + 1 > 2\beta \quad (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) προκύπτει ότι:  $\alpha^2 + 2\beta^2 + 11 > 6\alpha + 2\beta \Leftrightarrow$   
 $\alpha^2 + 2\beta^2 + 11 > 2(3\alpha + \beta)$

**γ)**  $\alpha^2 + \beta^2 + 50 \geq 10(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 50 \geq 10\alpha + 10\beta \Leftrightarrow \alpha^2 - 10\alpha + 25 + \beta^2 - 10\beta + 25 \geq 0 \Leftrightarrow$   
 $(\alpha - 5)^2 + (\beta - 5)^2 \geq 0 \text{ ισχύει αφού } (\alpha - 5)^2 \geq 0 \text{ και } (\beta - 5)^2 \geq 0$

**δ)**  $2\alpha^4 + 1 \geq 2\alpha^3 + \alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^4 - 2\alpha^3 + 1 - \alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3(\alpha - 1) - (\alpha^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$2\alpha^3(\alpha - 1) - (\alpha - 1)(\alpha + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(2\alpha^3 - \alpha - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^3 + \alpha^3 - \alpha - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)[\alpha(\alpha^2 - 1) + (\alpha^3 - 1)] \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)[\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1) + (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)(\alpha - 1)[\alpha(\alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1)] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)^2(\alpha^2 + \alpha + \alpha^2 + \alpha + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2(\alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)^2[\alpha^2 + (\alpha + 1)^2] \geq 0 \text{ ισχύει γιατί } (\alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ και } \alpha^2 + (\alpha + 1)^2 > 0.$$

**ε) i.** Έστω ότι  $\alpha > 1$  τότε  $\alpha^2 > 1$  και επειδή  $\beta^2 + \gamma^2 \geq 0$ , με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:  
 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 1$  που είναι άτοπο. Άρα  $\alpha \leq 1$ .

**ii.**  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \leq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 + \beta^3 - \beta^2 + \gamma^3 - \gamma^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha^2(\alpha - 1) + \beta^2(\beta - 1) + \gamma^2(\gamma - 1) \leq 0 \text{ που ισχύει αφού}$$

$$\alpha^2 \geq 0, \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 \leq 0 \text{ άρα } \alpha^2(\alpha - 1) \leq 0 \text{ και όμοια } \beta^2(\beta - 1) \leq 0, \gamma^2(\gamma - 1) \leq 0$$

**στ) i.**  $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$

**ii.** Είναι  $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \geq \frac{2\alpha}{\alpha^2} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\alpha^2} \geq \frac{2}{\alpha} \quad (1) \text{ και όμοια } 1 + \frac{1}{\beta^2} \geq \frac{2}{\beta} \quad (2), 1 + \frac{1}{\gamma^2} \geq \frac{2}{\gamma} \quad (3)$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1),(2),(3), έχουμε:

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \geq \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} \cdot \frac{2}{\gamma} = \frac{8}{\alpha\beta\gamma}$$

Είναι  $\alpha\beta\gamma \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \geq 8$ , οπότε  $\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \geq \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \geq 8$

