

3η Άσκηση

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ

α) Αν $1 < \alpha < \beta$, να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς: $\alpha^2, (\alpha-1)^2, \beta^2, (\beta+1)^2$

β) Αν $6 < \alpha < 8$ και $2 < \beta < 3$, να αποδείξετε ότι:

i) $8 < \alpha + \beta < 11$

ii) $12 < \alpha\beta < 24$

iii) $3 < \alpha - \beta < 6$

iv) $18 < 2\alpha + 3\beta < 25$

v) $2 < \frac{\alpha}{\beta} < 4$

vi) $1 < \frac{\alpha-2}{\beta+1} < 2$

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $A = \alpha^2 + \gamma^2 + 13$ και $B = 4\alpha + 6\gamma$.

δ) Αν οι αριθμοί α, β, γ βρίσκονται μεταξύ του 0 και του 1, να αποδείξετε ότι:

i) $(1-\alpha)(1-\beta) > 1-\alpha-\beta$

ii) $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) > 1-\alpha-\beta-\gamma$

ε) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

στ) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$.

ii. $\alpha\beta(\alpha+\beta) + \beta\gamma(\beta+\gamma) + \gamma\alpha(\gamma+\alpha) \geq 6\alpha\beta\gamma$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Επειδή $\alpha > 1$, είναι $\alpha - 1 > 0$ και $\alpha - 1 < \alpha$, άρα $(\alpha - 1)^2 < \alpha^2$ (1).

Επειδή $0 < 1 < \alpha < \beta$, είναι $\alpha^2 < \beta^2$ (2).

Είναι $0 < 1 < \beta < \beta + 1$, άρα $\beta^2 < (\beta + 1)^2$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (2), (3), έχουμε: $(\alpha - 1)^2 < \alpha^2 < \beta^2 < (\beta + 1)^2$.

$$\begin{array}{r} 6 < \alpha < 8 \\ + \\ 2 < \beta < 3 \\ \hline 8 < \alpha + \beta < 11 \end{array}$$

ii) Επειδή οι σχέσεις $6 < \alpha < 8$ και $2 < \beta < 3$, αποτελούνται από θετικούς αριθμούς, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει:

$$6 \cdot 2 < \alpha \cdot \beta < 8 \cdot 3 \Leftrightarrow 12 < \alpha\beta < 24$$

iii) Είναι $2 < \beta < 3 \Leftrightarrow -2 > -\beta > -3 \Leftrightarrow -3 < -\beta < -2$, άρα

$$\begin{array}{r} 6 < \alpha < 8 \\ + \\ -3 < -\beta < -2 \\ \hline 3 < \alpha + (-\beta) < 6 \Leftrightarrow 3 < \alpha - \beta < 6 \end{array}$$

iv) Είναι $6 < \alpha < 8 \Leftrightarrow 12 < 2\alpha < 16$ και $2 < \beta < 3 \Leftrightarrow 6 < 3\beta < 9$, άρα

$$\begin{array}{r} 12 < 2\alpha < 16 \\ + \\ 6 < 3\beta < 9 \\ \hline 18 < 2\alpha + 3\beta < 25 \end{array}$$

v) Είναι $2 < \beta < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\beta} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2}$ και $6 < \alpha < 8$, οπότε με

$$\text{πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει: } 6 \cdot \frac{1}{3} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 8 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 < \frac{\alpha}{\beta} < 4.$$

vi) $6 < \alpha < 8 \Leftrightarrow 6 - 2 < \alpha - 2 < 8 - 2 \Leftrightarrow 4 < \alpha - 2 < 6$ (1) και

$$2 < \beta < 3 \Leftrightarrow 2 + 1 < \beta + 1 < 3 + 1 \Leftrightarrow 3 < \beta + 1 < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{\beta + 1} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{\beta + 1} < \frac{1}{3} \quad (2)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2), προκύπτει:

$$4 \cdot \frac{1}{4} < (\alpha - 2) \cdot \frac{1}{\beta + 1} < 6 \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 < \frac{\alpha - 2}{\beta + 1} < 2.$$

γ) $A - B = \alpha^2 + \gamma^2 + 13 - 4\alpha - 6\gamma = \alpha^2 - 4\alpha + 4 + \gamma^2 - 6\gamma + 9 = (\alpha - 2)^2 + (\gamma - 3)^2 \geq 0$ άρα $A \geq B$.

δ) i) $(1 - \alpha)(1 - \beta) > 1 - \alpha - \beta \Leftrightarrow 1 - \beta' - \alpha + \alpha\beta > 1 - \alpha - \beta' \Leftrightarrow \alpha\beta > 0$ ισχύει γιατί $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

ii) $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) > (1 - \alpha - \beta)(1 - \gamma) = [1 - (\alpha + \beta)](1 - \gamma)$

Όμως από το πρώτο σκέλος είναι: $[1 - (\alpha + \beta)](1 - \gamma) > 1 - (\alpha + \beta) - \gamma = 1 - \alpha - \beta - \gamma$,

άρα $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) > 1 - \alpha - \beta - \gamma$

ε) 1ος τρόπος: $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{\beta}{2} + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{\beta}{2} + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^2}{1} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3\beta^2}{4} \geq 0$$

ισχύει γιατί $\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)^2 \geq 0$ και $\frac{3\beta^2}{4} \geq 0$.

2ος τρόπος: $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 + \beta^2 \geq 0$ ισχύει γιατί $\alpha^2 \geq 0$, $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$, $\beta^2 \geq 0$

στ) i. $\alpha\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} + \beta\gamma \cdot \frac{\beta}{\gamma} \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ ισχύει

ii. $\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha) \geq 6\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma - 6\alpha\beta\gamma \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha^2\beta + \beta\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta(\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma) + \alpha(\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma) + \gamma(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta(\alpha - \gamma)^2 + \alpha(\beta - \gamma)^2 + \gamma(\alpha - \beta)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

2ος τρόπος

$$\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha) \geq 6\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma - 6\alpha\beta\gamma \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \geq 6 \text{ ισχύει αφού } \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2, \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} \geq 2, \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} \geq 2$$



Στέλιος Μιχαήλογλου