2η Άσκηση

Πραγματικοί αριθμοί

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ

α) Να βρείτε τους α, β, γ για τους οποίους ισχύει ότι: $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}$ και $3\alpha+2\beta-\gamma=16$.

β) Αν $\alpha=10^5$, $\beta=\frac{1}{100}$ και $\gamma=0,001$ να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης

$$A=\left[\frac{\alpha^2\beta\gamma^{25}}{\alpha^{-1}\beta^{13}\gamma^{14}}\cdot\frac{\left(\alpha^{-1}\beta\gamma^{-2}\right)^2}{\left(\beta\gamma^{-2}\right)^{-3}}\right]^{-1}:\left(\alpha^3\beta^{-1}\gamma^3\right)^{-2}$$

γ) Να δείξετε ότι $\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2-\left(\alpha-\beta-\gamma\right)^2+\left(\alpha+\beta-\gamma\right)^2-\left(\alpha-\beta+\gamma\right)^2=8\alpha\beta$.

δ) Αν $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$, να αποδείξετε ότι: $\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

ε) Αν $\alpha+\beta=6$ και $\alpha\cdot\beta=7$, να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2+\beta^2=22$ **ii.** $\alpha^3+\beta^3=90$

στ) Να παραγοντοποιήσετε τη παράσταση $\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2\right)^2-4\alpha^2\beta^2$

ζ) Αν $\alpha^3+\beta^3=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι ίσοι ή αντίθετοι.

Λύση

α) Έστω $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\lambda$, τότε $\alpha=2\lambda,\ \beta=3\lambda$ και $\gamma=4\lambda$.

Είναι $3\alpha+2\beta-\gamma=16 \Leftrightarrow 3\cdot 2\lambda+2\cdot 3\lambda-4\lambda=16 \Leftrightarrow 8\lambda=16 \Leftrightarrow \lambda=2$, άρα $\alpha=2\cdot 2=4,\ \beta=3\cdot 2=6$ και $\gamma=4\cdot 2=8$.

β) $A=\left[\frac{\alpha^2\beta\gamma^{25}}{\alpha^{-1}\beta^{13}\gamma^{14}}\cdot\frac{\left(\alpha^{-1}\beta\gamma^{-2}\right)^2}{\left(\beta\gamma^{-2}\right)^{-3}}\right]^{-1}:\left(\alpha^3\beta^{-1}\gamma^3\right)^{-2}=\left(\alpha^{2-(-1)}\beta^{1-13}\gamma^{25-14}\cdot\frac{\alpha^{-2}\beta^2\gamma^{-4}}{\beta^{-3}\gamma^{6}}\right)^{-1}\cdot\left(\alpha^3\beta^{-1}\gamma^3\right)^2=$

$\left(\alpha^3\beta^{-12}\gamma^{11}\cdot\alpha^{-2}\beta^{2-(3)}\gamma^{-4-6}\right)^{-1}\cdot\alpha^6\beta^{-2}\gamma^6=\left(\alpha^{3-2}\beta^{-12+5}\gamma^{11-10}\right)^{-1}\cdot\alpha^6\beta^{-2}\gamma^6=$

$\left(\alpha\beta^{-7}\gamma\right)^{-1}\cdot\alpha^6\beta^{-2}\gamma^6=\alpha^{-1}\beta^7\gamma^{-1}\cdot\alpha^6\beta^{-2}\gamma^6=\alpha^{-1+6}\beta^{7-2}\gamma^{-1+6}=\alpha^5\beta^5\gamma^5=\left(\alpha\beta\gamma\right)^5 \Leftrightarrow$

$A=\left(10^5\cdot\frac{1}{100}\cdot 0,001\right)^5=\left(10^5\cdot\frac{1}{10^2}\cdot 10^{-3}\right)^5=\left(\frac{10^{5-3}}{10^2}\right)^5=\left(\frac{10^2}{10^2}\right)^5=1^5=1$

γ) $\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2-\left(\alpha-\beta-\gamma\right)^2+\left(\alpha+\beta-\gamma\right)^2-\left(\alpha-\beta+\gamma\right)^2=$

$\left[(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha-\beta-\gamma)\right]\left[(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha-\beta-\gamma)\right]+\left[(\alpha+\beta-\gamma)-(\alpha-\beta+\gamma)\right]\left[(\alpha+\beta-\gamma)+(\alpha-\beta+\gamma)\right]=$

$(\alpha+\beta+\gamma-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma+\alpha-\beta-\gamma)+(\alpha+\beta-\gamma-\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma+\alpha-\beta+\gamma)=$

$(2\beta+2\gamma)\cdot 2\alpha+(2\beta-2\gamma)\cdot 2\alpha=4\alpha\beta+\cancel{4\alpha\gamma}+4\alpha\beta-\cancel{4\alpha\gamma}=8\alpha\beta$

δ) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0 \Leftrightarrow \cancel{\alpha}\beta\gamma\frac{1}{\cancel{\alpha}}+\alpha\cancel{\beta}\gamma\frac{1}{\cancel{\beta}}+\alpha\beta\cancel{\gamma}\frac{1}{\cancel{\gamma}}=0 \Leftrightarrow \beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta=0\ \ (1)$

$\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma\right)\overset{(1)}{=}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

ε) i. $\left(\alpha+\beta\right)^2=6^2 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=36 \Leftrightarrow \alpha^2+2\cdot 7+\beta^2=36 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=36-14=22$

ii. $\alpha^3+\beta^3=\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=6\cdot\left(22-7\right)=6\cdot 15=90$

στ) $\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2\right)^2-4\alpha^2\beta^2=\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta\right)\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\right)=$

$\left[\left(\alpha-\beta\right)^2-\gamma^2\right]\left[\left(\alpha+\beta\right)^2-\gamma^2\right]=\left(\alpha-\beta-\gamma\right)\left(\alpha-\beta+\gamma\right)\left(\alpha+\beta-\gamma\right)\left(\alpha+\beta+\gamma\right)$

ζ) $\alpha^3+\beta^3=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2\left(\alpha-\beta\right)-y^2\left(\alpha-\beta\right)=0 \Leftrightarrow$

$\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha^2-\beta^2\right)=0 \Leftrightarrow \left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha+\beta\right)=0 \Leftrightarrow \left(\alpha-\beta\right)^2\left(\alpha+\beta\right)=0 \Leftrightarrow$

$\left(\alpha-\beta\right)^2=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$ ή $\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=-\beta$

Στέλιος Μιχαήλογλου