

1η Άσκηση

Πραγματικοί αριθμοί

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β .

α) Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι:

$$\left[(\alpha^{-7}\beta^3) : (\alpha\beta)^4 \right] \cdot \frac{(\alpha\beta)^{-2}}{(\alpha^{18})^0 (\beta^{-2}\alpha)^{-1} \beta^7} = 1.$$

β) Να αποδείξετε ότι $(\alpha^3 + \beta^3)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^3 + 3\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^2 = (2\alpha\beta)^3$

γ) i. Να αποδείξετε ότι $(\alpha - 3)^2 + (3\alpha + 1)^2 - 10(\alpha - 1)(\alpha + 1) = 20$.

ii. Χωρίς να κάνετε τις πράξεις να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$$997^2 + 3 \cdot 001^2 - 10 \cdot 999 \cdot 1.001.$$

δ) Αν $\alpha - \beta = 3$, να αποδείξετε ότι: $\alpha\beta - 5\alpha - (\beta - 1)^2 = -16$.

ε) Αν $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 = 3$, να αποδείξετε ότι: $\beta^3 + \frac{1}{\beta^3} = 0$, $\beta \neq 0$.

στ) Αν $\alpha^4 - 2\beta^2 = \alpha^2(\beta^2 - 2)$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι ίσοι ή αντίθετοι.

ζ) Αν $\frac{4\alpha + \beta}{6\alpha + 5\beta} = \frac{2\alpha - \beta}{3\alpha - 4\beta}$, όπου $\beta \neq 0$, να υπολογίσετε τη τιμή του κλάσματος $\frac{\beta}{\alpha}$.

Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς

Λύση

α) Επειδή οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι ισχύει ότι $\alpha\beta = 1$.

$$\begin{aligned} \left[(\alpha^{-7}\beta^3) : (\alpha\beta)^4 \right] \cdot \frac{(\alpha\beta)^{-2}}{(\alpha^{18})^0 (\beta^{-2}\alpha)^{-1} \beta^7} &= \left[(\alpha^{-7}\beta^3) : 1^4 \right] \cdot \frac{1^{-2}}{1 \cdot \beta^2 \alpha^{-1} \beta^7} = \alpha^{-7} \beta^3 \cdot \frac{1}{\beta^{2+7} \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{-7} \beta^3}{\beta^9 \alpha^{-1}} = \\ &= \alpha^{-7-(-1)} \beta^{3-9} = \alpha^{-6} \beta^{-6} = (\alpha\beta)^{-6} = 1^{-6} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) (\alpha^3 + \beta^3)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^3 + 3\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^2 &= \alpha^6 + 2\alpha^3\beta^3 + \beta^6 - \alpha^6 - 3\alpha^4\beta^2 - 3\alpha^2\beta^4 - \beta^6 + \\ 3\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) &= 2\alpha^3\beta^3 - \cancel{3\alpha^4\beta^2} - \cancel{3\alpha^2\beta^4} + \underline{3\alpha^4\beta^2} + 6\alpha^3\beta^3 + \cancel{3\alpha^2\beta^4} = 8\alpha^3\beta^3 = (2\alpha\beta)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \text{ i. } (\alpha - 3)^2 + (3\alpha + 1)^2 - 10(\alpha - 1)(\alpha + 1) &= \alpha^2 - \cancel{6\alpha} + 9 + 9\alpha^2 + \cancel{6\alpha} + 1 - 10(\alpha^2 - 1) = \\ &= \cancel{10\alpha^2} + 10 - \cancel{10\alpha^2} + 10 = 20 \end{aligned}$$

ii. Η προηγούμενη σχέση για $\alpha = 1000$ γίνεται:

$$(1000 - 3)^2 + (3 \cdot 1000 + 1)^2 - 10(1000 - 1)(1000 + 1) = 20 \Leftrightarrow 997^2 + 3.001^2 - 10 \cdot 999 \cdot 1.001 = 20$$

$$\delta) \alpha - \beta = 3 \Leftrightarrow \alpha = \beta + 3$$

$$\alpha\beta - 5\alpha - (\beta - 1)^2 = (\beta + 3)\beta - 5(\beta + 3) - (\beta^2 - 2\beta + 1) = \cancel{\beta^2} + 3\beta - 5\beta - 15 - \cancel{\beta^2} + 2\beta - 1 = -16$$

$$\epsilon) \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right)^2 = 3 \Leftrightarrow \beta^2 + 2\cancel{\beta} \frac{1}{\cancel{\beta}} + \frac{1}{\beta^2} = 3 \Leftrightarrow \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} = 3 - 2 = 1$$

$$\beta^3 + \frac{1}{\beta^3} = \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) \left(\beta^2 - \beta \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right) = \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right) (1 - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau) \alpha^4 - 2\beta^2 &= \alpha^2(\beta^2 - 2) \Leftrightarrow \alpha^4 - 2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2(\alpha^2 + 2) - \beta^2(2 + \alpha^2) = 0 \Leftrightarrow \\ (\alpha^2 + 2)(\alpha^2 - \beta^2) &= 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = -2 \text{ αδύνατο } \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta \end{aligned}$$

$$\zeta) \frac{4\alpha + \beta}{6\alpha + 5\beta} = \frac{2\alpha - \beta}{3\alpha - 4\beta} \Leftrightarrow \cancel{12\alpha^2} - 16\alpha\beta + 3\alpha\beta - 4\beta^2 = \cancel{12\alpha^2} + 10\alpha\beta - 6\alpha\beta - 5\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$-13\alpha\beta - 4\alpha\beta = 4\beta^2 - 5\beta^2 \Leftrightarrow -17\alpha\beta = -\beta^2 \stackrel{:(-\beta)}{\Leftrightarrow} \beta = 17\alpha \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 17$$

