

25η Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - 2x + \lambda}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$.

Έστω $\lambda = 1$

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $x^4 - 2x^2 + \frac{1}{f^2(x)} = 3$.

δ) Να δείξετε ότι $f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2$ για κάθε $x \neq 1$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - \frac{1}{f(x)} - 1 < 0$.

στ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < \frac{1}{|x-3|}$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ όταν $x^2 - 2x + \lambda \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα το τριώνυμο $x^2 - 2x + \lambda$ πρέπει να έχει $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow 4 < 4\lambda \Leftrightarrow \lambda > 1$

β) Πρέπει $x \neq 1$, δηλαδή το 1 πρέπει να είναι ρίζα του παρονομαστή, οπότε

$$1^2 - 2 \cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

γ) Για $\lambda = 1$ είναι $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - 2x + 1} = \frac{|x-1|}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{|x-1|}}{|x-1|^2} = \frac{1}{|x-1|}$

$$x^4 - 2x^2 + \frac{1}{f^2(x)} = 3 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + |x-1|^2 = 3 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + (x-1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^4 + (x-1)^2 - 2 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $(x-1)^2 = \omega$ όπου $\omega > 0$ και η (1) γίνεται: $\omega^2 + \omega - 2 = 0$.

Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega - 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες $\omega = 1$ ή $\omega = -2$ που απορρίπτεται.

Άρα $(x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1 = \pm 1 \Leftrightarrow (x-1=1 \Leftrightarrow x=2)$ ή $(x-1=-1 \Leftrightarrow x=0)$

δ) $f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2 \Leftrightarrow_{f(x)>0}^{f(x)} f(x) \cdot f(x) + f(x) \frac{1}{f(x)} \geq 2f(x) \Leftrightarrow$

$$f^2(x) - 2f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (f(x) - 1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

ε) $x^2 - \frac{1}{f(x)} - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - |x-1| - 1 > 0 \quad (2)$

Αν $x > 1$ τότε η (2) γίνεται:

$$x^2 - (x-1) - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \text{ που ισχύει.}$$

Αν $x < 1$ τότε η (2) γίνεται:

$$x^2 - (-x+1) - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x < -2 \text{ ή } x > 1 \text{ και λόγω του περιορισμού: } x < -2$$

Τελικά $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
x^2+x-2	+	0	-	0	+

στ) Πρέπει $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. Τότε

$$f(x) < \frac{1}{|x-3|} \Leftrightarrow \frac{1}{|x-1|} < \frac{1}{|x-3|} \Leftrightarrow |x-1| > |x-3| \Leftrightarrow |x-1|^2 > |x-3|^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 > \cancel{x^2} - 6x + 9 \Leftrightarrow 6x - 2x > 9 - 1 \Leftrightarrow 4x > 8 \Leftrightarrow x > 2 \text{ . Άρα } x \in (2, 3) \cup (3, +\infty)$$