

Άλγεβρα Β' Λυκείου

Κριτήριο αξιολόγησης στις ιδιότητες συναρτήσεων

Θέμα Α

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα μέρος της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f .

A 1. Να συμπληρώσετε το σχήμα.

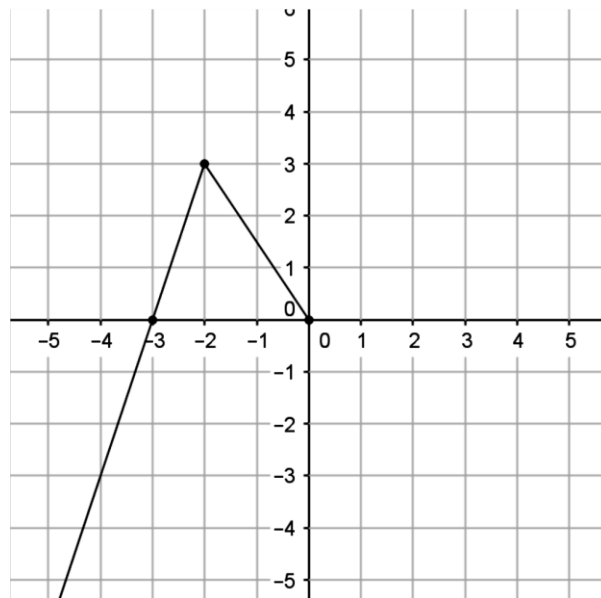
μονάδες 10

A 2. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της.

μονάδες 7

A 3. Να γράψετε τα ακρότατα και τις θέσεις ακροτάτων της.

μονάδες 8



Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

B 1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

μονάδες 10

B 2. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή. Η γραφική παράσταση της f ικανοποιεί κάποια συμμετρία; Αν ναι ποια και γιατί;

μονάδες 10

B 3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $f(x^2) > f(1)$

β) $f(x) < 8$

γ) $f(f(x) - 8) > 0$

δ) $x^5 + 4x^3 + 3x - 8 < 0$

μονάδες 4x6

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 8x^2 + 17$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ 1. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

μονάδες 7

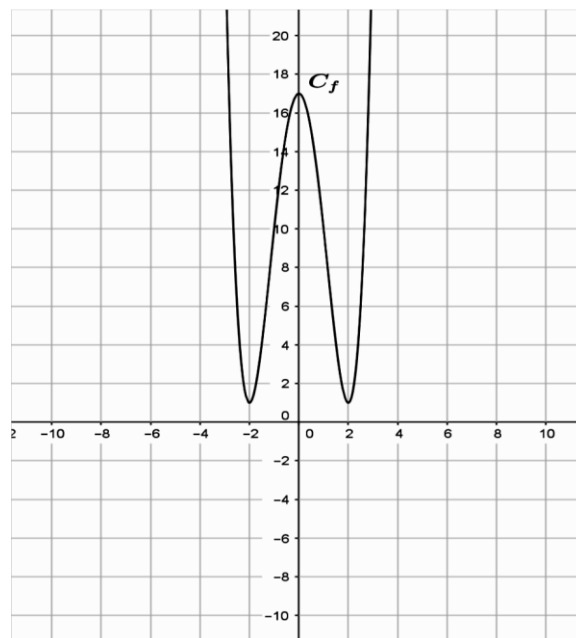
Γ 2. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το 1. Ποια είναι η θέση ελαχίστου;

μονάδες 9

Γ 3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$g(x) = f(x) - 10$, $h(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ και $\varphi(x) = f(x - 6)$.

μονάδες 3x5



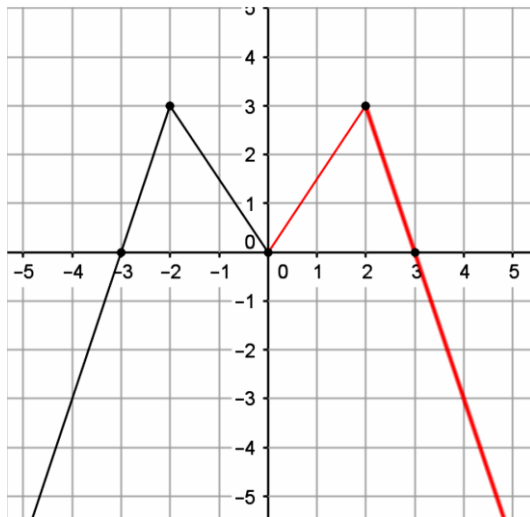
Καλή επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

Θέμα Α

Α 1.



Α 2. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$, $[0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-2, 0]$ και $[2, +\infty)$.

Α 3. Η f έχει μέγιστο το 3 για $x = -2$ και $x = 2$

Θέμα Β

Β 1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε: $3x_1 < 3x_2$ (1), $x_1^5 < x_2^5$ (2) και $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 4x_1^3 < 4x_2^3$ (3).

Από (1) + (2) + (3) $\Rightarrow x_1^5 + 4x_1^3 + 3x_1 < x_2^5 + 4x_2^3 + 3x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Β 2. Επειδή $A_f = \mathbb{R}$ για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$.

$$f(-x) = (-x)^5 + 4(-x)^3 - 3x = -x^5 - 4x^3 - 3x = -f(x), \text{ άρα η } f \text{ είναι περιττή.}$$

Επειδή η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, έτσι και η f έχει κέντρο συμμετρίας το O .

Β 3. α) $f(x^2) > f(1) \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$

β) $f(x) < 8 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow x < 1$

γ) $f(f(x) - 8) > 0 \Leftrightarrow f(f(x) - 8) > f(0) \Leftrightarrow f(x) - 8 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 8 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

δ) $x^5 + 4x^3 + 3x - 8 < 0 \Leftrightarrow x^5 + 4x^3 + 3x < 8 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow x < 1$

Θέμα Γ

Γ 1. Επειδή $A_f = \mathbb{R}$, για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$.

$$\text{Είναι } f(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 + 17 = x^4 - 8x^2 + 17 = f(x) \text{ άρα η } f \text{ είναι άρτια.}$$

Γ 2. Η f έχει ελάχιστο το 1 όταν $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 17 \geq 1 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 \geq 0 \text{ ισχύει.}$$

$$f(x) = 1 \text{ για } x = 2, -2 \text{ οι οποίες είναι οι θέσεις του ελαχίστου.}$$

Г 3.

