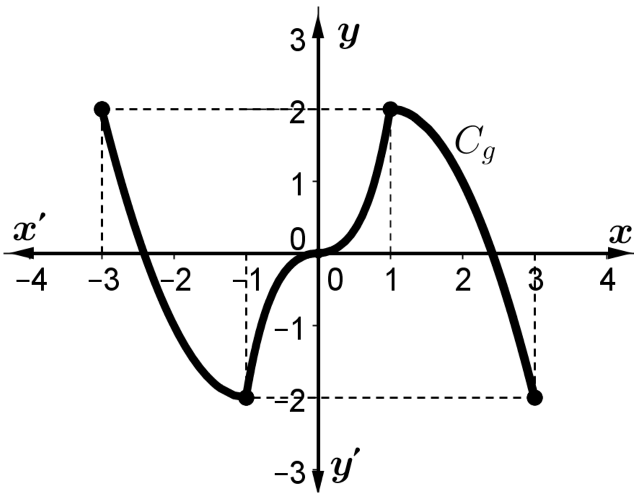
<u>ΤΕΣΤ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ(1)</u>

Θέμα 1

α) Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα;
β) Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0 \in A$,όπου Α το πεδίο ορισμού της f ;

Μονάδες 30

Θέμα 2.
Δίνεται η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως μονότονη

δ) Ποιες είναι οι θέσεις των ακροτάτων τους και ποια τα ακρότατα(αν υπάρχουν).

ε) Η συνάρτηση g είναι άρτια ή περιττή .Δικαιολογήσετε την απάντηση σας

Μονάδες 40

Θέμα 3.
α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-7|-|x+7|}{\sqrt{x^2-1}}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή ;

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}+1$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
ii) Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση g.

Μονάδες 30

Λύσεις

Θέμα 1

α) Θεωρία
β) Θεωρία

Θέμα 2.

α) $\mathrm{A}_f = [-3,3]$.

β) $f(\mathrm{A}) = [-2,2]$

γ) Η g είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-3,-1],[1,3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

δ) Παρουσιάζει ελάχιστο στα -1,3 το -2 και μέγιστο στα -3,1 το 2.

ε) Η συνάρτηση g είναι περιττή γιατί έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Θέμα 3.

α) i) πρέπει $x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x>1 \text{ ή } x<-1$,οπότε $A_f = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

ii) Για κάθε $x \in A_f, -x \in A_f$.

$$f(-x) = \frac{|-x-7|-|-x+7|}{\sqrt{(-x)^2-1}} = \frac{|x+7|-|x-7|}{\sqrt{x^2-41}} = -\frac{|x-7|-|x+7|}{\sqrt{x^2-1}} = -f(x) \text{ οπότε}$$

η f είναι περιττή συνάρτηση.

β) i) Πρέπει $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$ και $9-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 9$,οπότε $\mathrm{A}_f = [5,9]$.

ii) Έστω $x_1, x_2 \in [5,9]$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 5 < x_2 - 5 \underset{x_2-5\geq 0}{\overset{x_1-5\geq 0}{\Leftrightarrow}} \sqrt{x_1-5} < \sqrt{x_2-5} \text{ (1).}$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 9 - x_1 > 9 - x_2 \underset{9-x_2\geq 0}{\overset{9-x_1\geq 0}{\Leftrightarrow}} \sqrt{9-x_1} > \sqrt{9-x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{9-x_1} < -\sqrt{9-x_2} \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{9-x_1}+1 < -\sqrt{9-x_2}+1 \text{ (2).}$$

$(1)+(2) \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$ και η g είναι γνησίως αύξουσα.

ΤΕΣΤ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ(2)

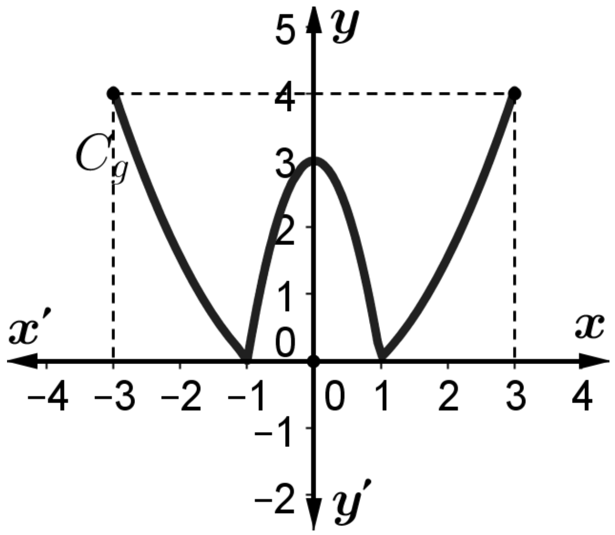
Θέμα 1

α) Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα;
β) Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x_0 \in A$,όπου A το πεδίο ορισμού της f ;

Μονάδες 30

Θέμα 2.

Δίνονται η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως μονότονη

δ) Ποιες είναι οι θέσεις των ακροτάτων τους και ποια τα ακρότατα(αν υπάρχουν).

ε) Η συνάρτηση g είναι άρτια ή περιττή .Δικαιολογήσετε την απάντηση σας

Μονάδες 40

Θέμα 3.

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x+9|+|x-9|}{x\cdot\sqrt{x^2-4}}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή ;

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x}+2$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
ii) Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση g.

Μονάδες 30

Πατσιμάς Δημήτρης

Λύσεις

Θέμα 1

α) Θεωρία
β) Θεωρία

Θέμα 2.

α) $A_f = [-3,3]$.

β) $f(A) = [0,4]$

γ) Η g είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-3,-1],[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1,0],[1,3]$.

δ) Παρουσιάζει ελάχιστο στα -1,1 το 0 και μέγιστο στα -3,3 το 4.

ε) Η συνάρτηση g είναι άρτια γιατί έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

Θέμα 3.

α) i) πρέπει $x \cdot \sqrt{x^2-4} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $\sqrt{x^2-4} \neq 0 \Leftrightarrow x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$ και
$x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2$ ή $x \leq -2$,οπότε
$A_f = (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

ii) Για κάθε $x \in A_f, -x \in A_f$.

$$f(-x) = \frac{|-x+9|+|-x-9|}{-x \cdot \sqrt{(-x)^2-4}} = -\frac{|x-9|+|x+9|}{x \cdot \sqrt{x^2-4}} = -f(x)$$ οπότε η f είναι περιττή συνάρτηση.

β) i) Πρέπει $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ και $5-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$,οπότε $A_f = [-2,5]$.

ii) Έστω $x_1, x_2 \in [-2,5]$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1+2 < x_2+2 \underset{x_2+2\geq 0}{\overset{x_1+2\geq 0}{\Leftrightarrow}} \sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2} \quad (1).$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 5-x_1 > 5-x_2 \underset{5-x_2\geq 0}{\overset{5-x_1\geq 0}{\Leftrightarrow}} \sqrt{5-x_1} > \sqrt{5-x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{5-x_1} < -\sqrt{5-x_2} \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{5-x_1}+2 < -\sqrt{5-x_2}+2 \quad (2).$$

$(1)+(2) \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$ και η g είναι γνησίως αύξουσα.