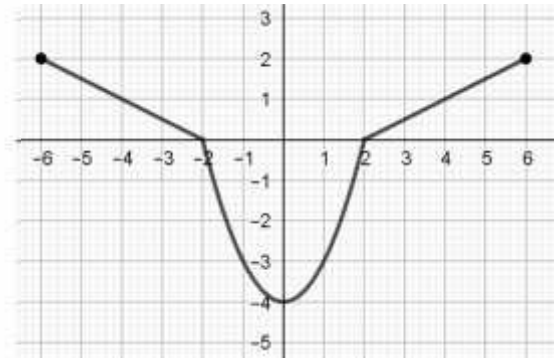


1η Άσκηση

Συναρτήσεις

Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα:

- α)** Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
β) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως μονότονη.
γ) Να γράψετε τις θέσεις και τις τιμές των ακροτάτων.
δ) Βλέποντας τη γραφική παράσταση, η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή;
 Δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
ε) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
στ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(f(2))$
ζ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
η) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $f(\alpha) + f(\beta) + f(4) + 7 \leq 0$.



Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Αν προβάλλουμε όλα τα σημεία της καμπύλης στον άξονα $x'x$, θα δημιουργηθεί το διάστημα $[-6, 6]$, άρα $D_f = [-6, 6]$.

Αν προβάλλουμε όλα τα σημεία της καμπύλης στον άξονα $y'y$, θα δημιουργηθεί το διάστημα $[-4, 2]$, άρα $f(A) = [-4, 2]$.

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-6, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, 6]$.

γ) Η f έχει ελάχιστο το -4 για $x = 0$ και μέγιστο το 2 για $x = -6$ και $x = 6$.

δ) Παρατηρούμε ότι αν “διπλώσουμε” το σχήμα κατά μήκος του άξονα $y'y$, τα τμήματα που βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα αυτού θα συμπίσουν. Αυτό σημαίνει ότι η f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, οπότε είναι άρτια.

ε) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ στα διαστήματα $[-6, -2)$ και $(2, 6]$

στ) Το σημείο της f που έχει $x = 2$ είναι το $(2, 0)$, οπότε $f(2) = 0$.

Η εξίσωση γίνεται: $f(x) = f(f(2)) \Leftrightarrow f(x) = f(0)$ (1)

Το σημείο της f που έχει $x = 0$ είναι το $(0, -4)$, οπότε $f(0) = -4$ και η (1) γίνεται:

$$f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(x) = -4 \Leftrightarrow x = 0$$

ζ) Είναι $-4 \leq f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in [-6, 6]$.

- Αν $\lambda < -4$ ή $\lambda > 2$ τότε δεν υπάρχουν σημεία της C_f με τεταγμένη $y < -4$ ή $y > 2$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.

- Αν $\lambda = -4$ τότε επειδή το μοναδικό σημείο της C_f με $y = -4$ είναι το $(0, -4)$, η εξίσωση $f(x) = \lambda = -4$ έχει μόνο μία λύση την $x = 0$.

- Αν $\lambda = 2$ τότε επειδή τα σημεία της C_f με $y = 2$ είναι τα $(-6, 2)$ και $(6, 2)$, η εξίσωση $f(x) = \lambda = 2$ έχει δύο λύσεις τις $x = -6$ και $x = 6$.

- Αν $-4 < \lambda < 2$, τότε υπάρχουν δύο σημεία της C_f με τεταγμένη $-4 < y = f(x) < 2$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

η) $f(\alpha) + f(\beta) + f(4) + 7 \leq 0 \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) + 1 + 7 \leq 0 \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) \leq -8$ (2)

Επειδή η f έχει ελάχιστο το -4 για $x = 0$, ισχύει ότι $f(x) \geq -4$ για κάθε $x \in [-6, 6]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα $f(\alpha) \geq -4$, $f(\beta) \geq -4$ οπότε $f(\alpha) + f(\beta) \geq -8$ (3)

Από τις (2), (3) προκύπτει ότι $f(\alpha) + f(\beta) = -8 \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta) = -4 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

