

1η Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x$, $\lambda, x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = 2$.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 + f(x) - x^3$ έχει ελάχιστο το -1 . Ποια είναι η θέση του ελαχίστου;

στ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g .

ζ) Να λύσετε την ανίσωση $|x|^3 - x^3 \leq 2(x - |x|)$.



Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$, ισχύει ότι $f(1) = 3 \Leftrightarrow 1 + \lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = 2$

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ οπότε για κάθε $x \in D_f$ και $-x \in D_f$.

Είναι $f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -x^3 - 2x = -f(x)$, οπότε η f είναι περιττή.

γ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε $2x_1 < 2x_2$ (1) και $x_1^3 < x_2^3$ (2).

Από (1) + (2) $\Rightarrow x_1^3 + 2x_1 < x_2^3 + 2x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

δ) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2) > 0 \stackrel{x^2+2>0}{\Leftrightarrow} x > 0$

ε) $g(x) = x^2 + f(x) - x^3 = x^2 + x^{\cancel{3}} + 2x - x^{\cancel{3}} = x^2 + 2x$.

Η g έχει ελάχιστο το -1 όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq -1 \Leftrightarrow$

$x^2 + 2x \geq -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$ ισχύει.

Η θέση ελαχίστου είναι οι τιμές του x για τις οποίες $g(x) = -1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

άλλος τρόπος

$g(x) = x^2 + f(x) - x^3 = x^2 + x^{\cancel{3}} + 2x - x^{\cancel{3}} = x^2 + 2x$.

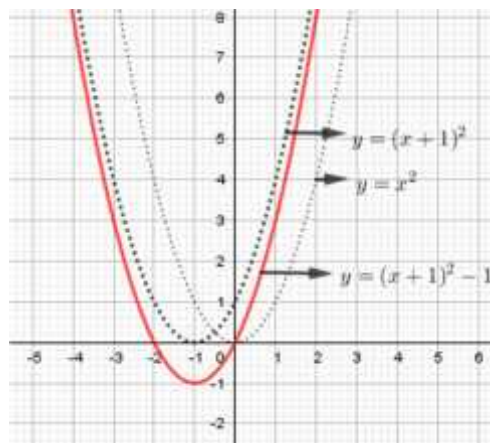
Η γραφική παράσταση της g είναι παραβολή, οπότε έχει ελάχιστο το $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{4}{4} = -1$, το οποίο

παρουσιάζει στο $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2}{2} = -1$.

στ) Είναι $g(x) = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$.

Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = x^2$ κατά μία μονάδα

αριστερά και κατακόρυφη μετατόπιση της $y = (x+1)^2$ κατά μία μονάδα προς τα κάτω.



ζ) $|x|^3 - x^3 \leq 2(x - |x|) \Leftrightarrow |x|^3 - x^3 \leq 2x - 2|x| \Leftrightarrow |x|^3 + 2|x| \leq x^3 + 2x \Leftrightarrow f(|x|) \leq f(x) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} |x| \leq x$.

Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|x| \geq x$ άρα $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$