ΤΕΣΤ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ(1)

Θέμα 1

Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$.

Μονάδες 40

Θέμα 2.

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\mu - 2)x - 5y = 5 \\ x + (\mu + 2)y = 5 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε πραγματική τιμή του μ.

Μονάδες 15

β) Να βρεθεί η μοναδική λύση (x_0, y_0) του παραπάνω συστήματος.

Μονάδες 15

γ) Να βρεθεί ο θετικός αριθμός μ ,ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση $x_0 + y_0 = 15$

Μονάδες 15

δ) Αν ισχύει $50D^2 - 10D \cdot D_x + D_x^2 + 10D \cdot D_y + D_y^2 = 0$

i) να αποδείξετε ότι $\left(5D - D_x\right)^2 + \left(5D + D_y\right)^2 = 0$ Μονάδες 8

ii) να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ. Μονάδες 7

Λύσεις

Θέμα 1

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x\cdot y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{36}{x^2}=13 \\ y=\dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+36=13x^2 \\ y=\dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-13x^2+36=0\ (1) \\ y=\dfrac{6}{x}\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow .$$

Θέτουμε $x^2=\omega$ (3) οπότε $(1)\Rightarrow \omega^2-13\omega+36=0 \Leftrightarrow \omega=4$ ή $\omega=9$

$(3)\overset{\omega=4}{\Rightarrow} x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$

$(3)\overset{\omega=9}{\Rightarrow} x^2=9 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$

$(2)\overset{x=2}{\Rightarrow} y=\dfrac{6}{2}=3$, $(2)\overset{x=-2}{\Rightarrow} y=\dfrac{6}{-2}=-3$, $(2)\overset{x=3}{\Rightarrow} y=\dfrac{6}{3}=2$ και $(2)\overset{x=-3}{\Rightarrow} y=\dfrac{6}{-3}=-2$.

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι : $(2,3),(-2,-3),(3,2)$ $\kappa\alpha\iota$ $(-3,-2)$

Θέμα 2.

α) $D=\begin{vmatrix} \mu-2 & -5 \\ 1 & \mu+2 \end{vmatrix}=\mu^2-4+5=\mu^2+1\neq 0$.

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε πραγματική τιμή του μ.

β) $D_{x_0}=\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 5 & \mu+2 \end{vmatrix}=5\mu+10+25=5\mu+35$

$D_{y_0}=\begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=5\mu-10-5=5\mu-15$

Άρα $x_0=\dfrac{D_{x_0}}{D}=\dfrac{5\mu+35}{\mu^2+1}$, $y_0=\dfrac{D_{y_0}}{D}=\dfrac{5\mu-15}{\mu^2+1}$.

Επομένως η μοναδική λύση του είναι $(x_0,y_0)=\left(\dfrac{5\mu+35}{\mu^2+1},\dfrac{5\mu-15}{\mu^2+1}\right)$.

γ) Να βρεθεί ο θετικός αριθμός μ ,ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση

$x_0+y_0=15 \Leftrightarrow \dfrac{5\mu+35}{\mu^2+1}+\dfrac{5\mu-15}{\mu^2+1}=15 \Leftrightarrow 5\mu+35+5\mu-15=15\mu^2+15 \Leftrightarrow$

$5\mu+35+5\mu-15=15\mu^2+15 \Leftrightarrow 15\mu^2-10\mu-5=0 \overset{:5}{\Leftrightarrow} 3\mu^2-2\mu-1=0 \Leftrightarrow \mu=1$ ή $\mu=-\dfrac{1}{3}$

Άρα ο θετικός αριθμός μ ,ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση είναι ο $\mu=1$

δ) i) $50D^2-10D\cdot D_x+D_x^2+10D\cdot D_y+D_y^2=0 \Leftrightarrow$

$25D^2-10D\cdot D_x+D_x^2+25D^2+10D\cdot D_y+D_y^2=0 \Leftrightarrow \left(5D-D_x\right)^2+\left(5D+D_y\right)^2=0$

ii) $\left(5D-D_x\right)^2+\left(5D+D_y\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$5D-D_x=0 \Leftrightarrow 5\left(\mu^2+1\right)-5\mu-35=0 \Leftrightarrow 5\mu^2+5-5\mu-35=0 \Leftrightarrow$

$$5\mu^2-5\mu-30=0\overset{:5}{\Leftrightarrow}\mu^2-\mu-6=0...\Leftrightarrow\mu=3 \text{ ή } \mu=-2 \text{ και}$$

$$5D+D_y=0\Leftrightarrow 5\left(\mu^2+1\right)+5\mu-15=0\Leftrightarrow 5\mu^2+5+5\mu-15=0\Leftrightarrow$$

$$5\mu^2+5\mu-10=0\overset{:5}{\Leftrightarrow}\mu^2+\mu-2=0\Leftrightarrow\mu=-2 \text{ ή } \mu=1 \text{ .}$$

Άρα $\mu=-2$.

.

<u>ΤΕΣΤ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ(2)</u>

Θέμα 1

Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} y^2 - x^2 = 3 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$.

Μονάδες 40

Θέμα 2.

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x + (\lambda - 1)y = 3 \\ (1-\lambda)x + y = 3 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε πραγματική τιμή του λ.

Μονάδες 15

β) Να βρεθεί η μοναδική λύση (x_0, y_0) του παραπάνω συστήματος.

Μονάδες 15

γ) Να βρεθεί ο αρνητικός αριθμός λ ,ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση

$x_0 + y_0 = \frac{3}{5}$.

Μονάδες 15

δ) Αν ισχύει $18D^2 - 6D \cdot D_x + D_x^2 - 6D \cdot D_y + D_y^2 = 0$

i) να αποδείξετε ότι $\left(3D - D_x\right)^2 + \left(3D - D_y\right)^2 = 0$ Μονάδες 8

ii) να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ. Μονάδες 7

Λύσεις

Θέμα 1

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 3 \\ x \cdot y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x^2} - x^2 = 3 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^4 = 3x^2 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \ (1) \\ y = \dfrac{2}{x} \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow .$$

Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ (3) οπότε $(1) \Rightarrow \omega^2 + 3\omega - 4 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega = -4$ απορρίπτεται

$(3) \overset{\omega=1}{\Rightarrow} x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

$(2) \overset{x=1}{\Rightarrow} y = \dfrac{2}{1} = 2$ και $(2) \overset{x=-1}{\Rightarrow} y = \dfrac{2}{-1} = -2$.

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι : $(1,2),(-1,-2)$

Θέμα 2.

α) $D = \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + (\lambda - 1)^2 > 0$.

Άρα $D \neq 0$ και το σύστημα έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε πραγματική τιμή του μ.

β) $D_{x_0} = \begin{vmatrix} 3 & \lambda - 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 3\lambda + 3 = 6 - 3\lambda$

$D_{y_0} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1-\lambda & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 + 3\lambda = 3\lambda$

Άρα $x_0 = \dfrac{D_{x_0}}{D} = \dfrac{6-3\lambda}{(\lambda-1)^2+1} = \dfrac{6-3\lambda}{\lambda^2 - 2\lambda + 2}$, $y_0 = \dfrac{D_{y_0}}{D} = \dfrac{3\lambda}{\lambda^2 - 2\lambda + 2}$.

Επομένως η μοναδική λύση του είναι $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{6-3\lambda}{\lambda^2 - 2\lambda + 2}, \dfrac{3\lambda}{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \right)$.

γ) Να βρεθεί ο θετικός αριθμός μ ,ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση

$x_0 + y_0 = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \dfrac{6-3\lambda}{\lambda^2 - 2\lambda + 2} + \dfrac{3\lambda}{\lambda^2 - 2\lambda + 2} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow 30 \cancel{-15\lambda} \cancel{+15\lambda} = 3\lambda^2 - 6\lambda + 6 \Leftrightarrow$

$3\lambda^2 - 6\lambda - 24 = 0 \overset{:3}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ή $\lambda = 4$

Άρα ο αρνητικός αριθμός λ ,ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση είναι ο $\lambda = -2$

δ) i) $18D^2 - 6D \cdot D_x + D_x^2 - 6D \cdot D_y + D_y^2 = 0 \Leftrightarrow$

$9D^2 - 6D \cdot D_X + D_x^2 + 9D^2 - 6D \cdot D_y + D_y^2 = 0 \Leftrightarrow$

ii) $(3D - D_x)^2 + (3D - D_y)^2 = 0$

$3D - D_x = 0 \Leftrightarrow 3(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - 6 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 6\lambda + \cancel{6} \cancel{-6} + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow$

$3\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 3\lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ή $\lambda = 1$ και

$$3D - D_x = 0 \Leftrightarrow 3\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 6\lambda + 6 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda^2 - 9\lambda + 6 = 0 \overset{:3}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2 \ .$$

Άρα $\lambda=1$.