

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΣΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Γραφική λύση συστημάτων

1. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 0), B(0, 1), \Gamma\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και $\Delta\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Να βρείτε ποιο από αυτά

επαληθεύει το σύστημα
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

2. Να επιλύσετε γραφικά τα συστήματα:

α)
$$\begin{cases} x = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

3. Να επιλύσετε γραφικά τα συστήματα:

α)
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ x - \frac{1}{3}y = \frac{13}{12} \end{cases}$$

4. Να επιλύσετε γραφικά τα συστήματα:

α)
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$

5. Να επιλύσετε γραφικά τα συστήματα:

α)
$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 4x - \frac{4}{3}y = 10 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = \frac{1}{4} \\ x + 3y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

6. Να επιλύσετε γραφικά τα συστήματα:

α)
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + \frac{x}{3} = -2 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} 5y - x = \frac{2}{3} \\ -y + 3x = 5 \end{cases}$$

7. Να επιλύσετε γραφικά τα συστήματα:

α)
$$\begin{cases} x + 2y = -3x + 6 \\ \frac{y}{2} - 5x = \frac{10}{3} + y \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} y - x = 7 \\ 2y - x = 3 + x \end{cases}$$

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 2×2

8. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{y}{3} = 2\frac{2}{3} \\ x = 2(y+1) \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x-5 = \frac{y-2}{7} \\ 4y-3 = \frac{x+10}{3} \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \frac{x+1}{2} = 8 - \frac{y-1}{2} \\ \frac{y+1}{2} = 9 - \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x = \frac{1}{2} - 3\left(y - \frac{3}{4}\right) \\ x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} \frac{y+1}{3} + \frac{z-1}{2} = 5 \\ \frac{2y+5}{3} - \frac{z+1}{4} = 3 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} \frac{a-1}{2} + \frac{\beta-1}{2} = 4\frac{1}{5} \\ \frac{\alpha+\beta}{3} = \beta-1 \end{cases}$$

$$\zeta) \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{2} \\ \frac{x+y}{15} - \frac{x-y}{12} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

9. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 5(x+2y) - (3x+11y) = 14 \\ 7x-9y - (x-4y) = 38 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 3x - \frac{y-5}{7} = \frac{4x-3}{2} \\ \frac{3y+4}{5} - \frac{1}{3}(2x-5) = y \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 4(x-y) - (5x+3y) = 30 \\ 3(3x+7y) - 2(x+9y) = 12 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 3(x-y) + 2(x+y) = 15 \\ 3(x+y) + 2(x-y) = 25 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} 3(x+y-5) = 2(y-x) \\ 3(x-y-7) + 2(x+y-2) = 0 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} 7(2x-y) + 5(3y-4x) + 30 = 0 \\ 59y - x + 3 = 6(y-2x) \end{cases}$$

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 3×3

10. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 2x + y - \omega = 1 \\ x + 2y + \omega = 7 \\ 3x - y + 2\omega = 7 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x + y + \omega = 1 \\ 2x + y - \omega = 6 \\ x - y + 2\omega = -5 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 2x + y + \omega = 1 \\ 4x - y + \omega = -5 \\ -x + y + 2\omega = 5 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 3x - y - \omega = 8 \\ x + y = 1 \\ 2y - \omega = -1 \end{cases}$$

11. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} \frac{2y+x-\omega}{3} + \frac{x}{5} = \frac{4}{5} \\ 2y - \frac{x+\omega}{2} = 3 \\ 2(x-y) - \frac{\omega}{3} = -2 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x+y=2 \\ y+\omega=5 \\ \omega+x=7 \end{cases}$$

12. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 2x+3y-\omega=4 \\ x-5y+3\omega=3 \\ 5x+y+\omega=38 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 5x+2y-3\omega=0 \\ 3x-4y+5\omega=10 \\ 7x-3y+6\omega=10 \end{cases}$$

13. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} x+2y+3\omega=0 \\ 4x+5y+3\omega=0 \\ 7x+8y+9\omega=0 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x+y+\omega=0 \\ x-y+\omega=0 \\ 2x+y+3\omega=0 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x+2y+\omega=0 \\ 2x+3y+2\omega=0 \\ 3x+4y+3\omega=0 \end{cases}$$

14. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 5x-4y+\omega=3 \\ 3x+y-3\omega=31 \\ x+4y+\omega=15 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x+2y+3\omega=14 \\ 3x+8y+4\omega=20 \\ 2x+6y+\omega=18 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x+y+\omega=0 \\ 3x+4y+8\omega=0 \\ 2x+3y+7\omega=0 \end{cases}$$

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

15. Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες :

$$\alpha) \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\beta) \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

16. Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες :

$$\alpha) \begin{vmatrix} x+1 & x^2+x+1 \\ x-1 & x^2+1 \end{vmatrix}$$

$$\beta) \begin{vmatrix} x & x+2 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} \frac{a}{a+\beta} & \frac{\beta}{\alpha-\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha-\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{vmatrix}$$

17. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \begin{vmatrix} x+2 & 2x \\ x-1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta) \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = 2x - \begin{vmatrix} 2 & x \\ 4 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\delta) \begin{vmatrix} 2x & x-1 \\ x+1 & \frac{x}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & x+1 \\ 2x-1 & 2x+3 \end{vmatrix} + \frac{x+5}{2}$$

18. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) \left| \begin{array}{cc} x-1 & 2x-4 \\ x+2 & 2x \end{array} \right| \geq 0$$

$$\beta) \left| \begin{array}{cc} 2x & x-4 \\ 2 & x-1 \end{array} \right| < \left| \begin{array}{cc} x-2 & 3 \\ -x & x+2 \end{array} \right|$$

ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

19. Να λυθούν τα συστήματα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου μ

$$\alpha) \begin{cases} \mu x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \mu x - y = 2\mu \\ 2x + \mu y = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \mu x - y = 2 - \mu \\ \mu x + 5y = 8 - \mu \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \mu x + 4y = 9\mu + 4 \\ 9x + \mu y = 2\mu^2 + \mu + 9 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} \mu x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} \mu x - y = 1 \\ 10x - 2y = \mu - 1 \end{cases}$$

20. α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x + \lambda y = \lambda \\ \lambda x + \lambda y = 3 \end{cases}$$

β) Για τη μοναδική λύση (x_0, y_0) να βρεθεί $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $2x_0 + |y_0| = 0$.

21. α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} (2-a)x - 3ay = 3 \\ 3ax + (a-2)y = a-2 \end{cases}$$

β) Για τη μοναδική λύση (x_0, y_0) να βρεθεί $a \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $2x_0 + y_0 = 1$.

22. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ το σύστημα
$$\begin{cases} \mu x + y = 2\mu \\ x + \mu y = \mu + 1 \end{cases}$$

είναι : i) αδύνατο ii) αόριστο

23. Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} (\alpha+1)x + 2y = \alpha + \beta \\ (3\alpha+1)x + 4y = 2\alpha - \beta + 6 \end{cases}$$

Να βρεθεί για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το σύστημα είναι αόριστο και στην συνέχεια να βρεθεί η λύση του συστήματος.

24. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τα συστήματα :

$(\Sigma_1) : \begin{cases} \beta x - 3y = \alpha + \beta \\ \alpha x + (\beta - 2)y = \beta - \alpha \end{cases}$ και $(\Sigma_2) : \begin{cases} 3\alpha x - 2\beta y = 4 \\ x + 2y = \beta + 3 \end{cases}$ είναι συγχρόνως αδύνατα.

25. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε τα συστήματα Σ_1 και Σ_2 να είναι συγχρόνως αδύνατα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} (a-1)x - \beta y = 2 \\ \alpha x + y = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \Sigma_2: \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -x + \alpha y = 2 \end{cases}$$

26. Δίνονται τα συστήματα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} (a+1)x - \beta y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} x + (\beta + 2)y = a^2 + 1 \\ x - (a-1)y = \beta^3 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι αν το σύστημα (Σ_1) έχει άπειρες λύσεις το σύστημα (Σ_2) είναι αδύνατο

27. Να λυθούν τα συστήματα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου μ

$$\begin{aligned} \alpha) & \begin{cases} (2\mu+1)x + (\mu-4)y = \mu \\ (2\mu+1)x + (\mu-4)y = 2\mu \end{cases} & \beta) & \begin{cases} x - \mu y = \frac{5}{\mu^2 - 1} \\ x + (\mu-4)y = \frac{3}{\mu^2 - 1} \end{cases} \\ \gamma) & \begin{cases} x + \mu y = \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1} \\ \mu x + y = \frac{2\mu}{\mu^2 - 1} \end{cases} & \delta) & \begin{cases} \mu x - y = 2 - \mu \\ \mu x + 5y = 8 - \mu \end{cases} \end{aligned}$$

28. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + \lambda y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) για την οποία ισχύει

$$\text{η σχέση : } 2x_0 - y_0 = -\frac{7}{2}$$

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x + y + \omega = \lambda \\ \lambda xy - \omega^2 = \lambda^2 \\ \lambda^2 \omega + 3x = -y \end{cases}$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

29. Σε ένα σύστημα δυο γραμμικών σύστημα εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 8D + 6D_x - 25.$$

α) Ναδειχθεί ότι: $(D-4)^2 + D_y^2 + (D_x-3)^2 = 0$.

β) Να βρεθούν τα x και y .

30. Σε ένα σύστημα δυο γραμμικών σύστημα εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 16D + 4D_y - 68. \text{ Να λύσετε το σύστημα.}$$

31. Σε ένα σύστημα δυο γραμμικών σύστημα εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$D_x + 2D_y = 3D \quad \text{και} \quad 2D_x - D_y = D. \text{ Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή.}$$

32. Σε ένα σύστημα δυο γραμμικών σύστημα εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$\begin{cases} (\lambda+3)D_x + (\mu-1)D_y = \lambda D \\ \mu D_x + \lambda D_y = (3\lambda-4\mu)D \end{cases}$$

Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ , αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, τη $(x, y) = (-5, 1)$

33. Σε ένα σύστημα δυο γραμμικών σύστημα εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$D_x^2 + 4D_y^2 = 4D_x D_y \quad \text{και} \quad 4D_x - D_y = 7D. \text{ Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή.}$$