

5.1 Ακολουθίες (Θεωρία - Άσκηση 1)

Τρίτη, 16 Μαρτίου 2021 5:25 μμ

$$(a_n) \quad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21, \dots \end{matrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 πρώτος δευτερός τρίτος
 όρος όρος όρος

(Τα πολλαπλασια του 3 χρησιμοποιούν για ακολουθία)
 Πρώτος είναι ο 1ος όρος της ακολουθίας;

$$a_{10} = 3 \cdot 10 = 30$$

$$a_{20} = 3 \cdot 20 = 60$$

$$a_v = 3 \cdot v \quad v = \text{όγδοος όρος}$$

ή
γενικός όρος

Αντίστοιχα:

$$A_v \quad (a_v) \quad \text{Τα πολλαπλα του } 8$$

$$a_v = 8v$$

$1 \times 8 = 8$	a_1
$2 \times 8 = 16$	a_2
$3 \times 8 = 24$	a_3
$4 \times 8 = 32$	a_4

total

$$a_v = 8v$$

$$4 \times 8 = 32 \quad a_4$$

Από το γεγονός ότι μπορούμε να πούμε
ότι ο a_v είναι ακριβώς διπλάσιος από το a_{v-1}

$$a_v = 3v - 5$$

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 5 = 3 - 5 = -2$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 - 5 = 9 - 5 = 4$$

$$a_{10} = 3 \cdot 10 - 5 = 30 - 5 = 25$$

Οι ακριβείς τιμές παίρνουν ως

όπου f είναι ακριβώς η a_v

...όπου οι συντεταγμένες

$$f(x) = 3x - 5$$

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 5 = -2$$

$$f(2) = 1$$

$$f(3) = 4$$

$$f(10) = 25$$

Παράδειγμα 1

$$a_v = 2v^2 - 3$$

i)

$$a_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$a_3 = 2 \cdot 3^2 - 3 = 2 \cdot 9 - 3 = 18 - 3 = 15$$

$$a_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$a_4 = 2 \cdot 4^2 - 3 = 32 - 3 = 29$$

$$a_{20} = 2 \cdot 20^2 - 3 = 2 \cdot 400 - 3 = 800 - 3 = 797$$



$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 20 \\ \hline 400 \end{array}$$

ii)

$$\beta_v = \frac{(-1)^v}{2^v - 1}$$

$$\beta_1 = \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = \frac{-1}{2-1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\beta_2 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{3}$$

'ΑΓΕΝΕΥ 1 ΣΕΛ. 124

i) $a_v = 2v + 1$

$$a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

$$a_5 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$$

ii) $a_v = 2^v$

$$a_1 = 2^1 = 2$$

$$a_2 = 2^2 = 4$$

$$a_3 = 2^3 = 8$$

$$a_4 = 2^4 = 16$$

$$a_5 = 2^5 = 32$$

$$2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{= 4 \cdot 2} = 8$$

$$2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^4 \cdot 2}$$

$$= 16 \cdot 2$$

$$= 32$$

Παρατηρώ ότι μπορώ να πάρω το ίδιο αν αλλά πολλαπλασιάζω το προηγούμενο αποτέλεσμα με 2 :

$$a_v = a_{v-1} \cdot 2$$

Αναδρομική σχέση

$$iii) a_v = v^2 + v$$

$$a_1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$a_2 = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$a_3 = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$$

$$a_4 = 4^2 + 4 = 16 + 4 = 20$$

$$a_5 = 5^2 + 5 = 25 + 5 = 30$$

$$iv) a_v = \frac{v^2 - 1}{v + 1}$$

$$a_1 = \frac{1^2 - 1}{1 + 1} = \frac{1 - 1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$a_2 = \frac{2^2 - 1}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

παράτηρώ ότι:

$$a_v = \frac{(v-1)(v+1)}{v+1} = v-1$$

$$a_3 = 2$$

$$a_4 = 3$$

$$a_5 = 4$$

$$a_{660} = 659$$

Η αντιστοίχηση του τιμού του γλυκού βέου με
βασικά να κάνω αντιστοίχηση αριθμών!

$$viii) a_v = n\pi \frac{v}{4}$$

$$a_1 = n\pi \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_2 = n\pi \frac{2}{4} = n\pi \frac{1}{2} = 1$$

$$a_3 = n\pi \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_3 = nr \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_4 = nr \frac{4\pi}{4} = nr\pi = 0$$

$$a_5 = nr \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v) \quad a_v = \left(-\frac{1}{10} \right)^{v-1}$$

$$a_1 = \left(-\frac{1}{10} \right)^{1-1} = \left(-\frac{1}{10} \right)^0 = 1$$

$$\left(\text{Θυτιζω για } a \neq 0 : a^0 = 1 \right)$$

$$a_2 = \left(-\frac{1}{10} \right)^{2-1} = \left(-\frac{1}{10} \right)^1 = -\frac{1}{10} = -0,1$$

$$\left(\text{Θυτιζω } a^1 = a, \quad a \in \mathbb{R} \right)$$

$$a_3 = \left(-\frac{1}{10} \right)^{3-1} = \left(-\frac{1}{10} \right)^2 = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$a_4 = \left(-\frac{1}{10} \right)^{4-1} = \left(-\frac{1}{10} \right)^3 = \frac{-1}{1000} = -0,001$$

$$, , , 5-1 \quad \left(-\frac{1}{10} \right)^4 = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

$$a_5 = \left(-\frac{1}{10}\right)^{5-1} = \left(-\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

$$\text{vi)} \quad a_v = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^v$$

$$a_1 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad (= 1,5)$$

$$a_2 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_3 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \left(-\frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

$$a_4 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$a_5 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = 1 + \frac{1}{32} = \frac{33}{32}$$

Επομένως,

$$a_v = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^v = 1 - \frac{(-1)^v}{2^v}$$

$$= \frac{2^v - (-1)^v}{2^v} = \frac{2^v + (-1)^{v+1}}{2^v}$$

$$a_v = \begin{cases} \frac{2^v + 1}{2^v} & a_v \text{ v περιττός} \\ \frac{2^v - 1}{2} & a_v \text{ v άρτιος} \end{cases}$$

$$v(i) \quad a_v = |5 - v|$$

$$a_1 = |5 - 1| = |4| = 4$$

$$a_2 = |5 - 2| = |3| = 3$$

$$a_3 = |5 - 3| = |2| = 2$$

$$a_4 = |5 - 4| = |1| = 1$$

$$a_5 = |5 - 5| = |0| = 0$$

$$a_6 = |5 - 6| = |-1| = 1$$

$$a_7 = |5 - 7| = |-2| = 2$$

$$a_8 = |5 - 8| = |-3| = 3$$

$$a_9 = |5 - 9| = |-4| = 4$$

$$a_{10} = |5 - 10| = |-5| = 5$$

$$ix) \quad a_v = \frac{2^v}{v^2}$$

$$a_1 = \frac{2^1}{1^2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1$$

$$a_3 = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{2^4}{2^4} = \frac{16}{16} = 1$$

$$a_{10} = \frac{2^{10}}{10^2} = \frac{1024}{100}$$

Παρατηρούμε ότι
από κάποιο όριο
και μετά ο αριθμός
είναι πολλαπλασιασμένος
από τον παρανομαστή!

$$a_4 = \frac{2^4}{4^2} = \frac{16}{16} = 1$$

and so

$$a_5 = \frac{2^5}{5^2} = \frac{32}{25}$$

$$x) \quad a_v = (-1)^{v+1} \cdot \frac{1}{v}$$

$$a_1 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = (-1)^3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = (-1)^4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = (-1)^5 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$a_5 = (-1)^6 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

Παρατηρούμε ότι το $(-1)^v$
αλλάζει περιόδους 2 και σε κάθε 2 οροί

$$xi) \quad a_v = (-1)^{v+1}$$

$$a_1 = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$$

$$a_2 = (-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1$$

$$a_3 = (-1)^{3+1} = (-1)^4 = 1$$

$$a_4 = (-1)^{4+1} = (-1)^5 = -1$$

$$a_3 = (-1)^{n+1} = (-1)^5 = -1$$

$$a_4 = (-1)^n = (-1)^6 = 1$$

$$a_5 = (-1)^{n+1} = (-1)^7 = -1$$

Παρατηρούμε ότι αναδρομικά γράφεται ως εξής:

$$a_1 = 1$$

$$a_n = -a_{n-1}$$