5.1 Αναδρομικοί τύποι (+Ασκήσεις 2-4)

Δευτέρα, 22 Μαρτίου 2021 5:22 μμ

Ας πάρουμε τα πολλαπλάσια του 3

(a_ν) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24

+3 +3

a_1

$a_\nu = 3 \cdot \nu$ (γενικός όρος)

Αναδρομικός τύπος

$a_1 = 3$

$a_\nu = a_{\nu-1} + 3$

Μου δίνει έναν όρο από έναν προηγούμενο (ή από κάποιους προηγούμενους)

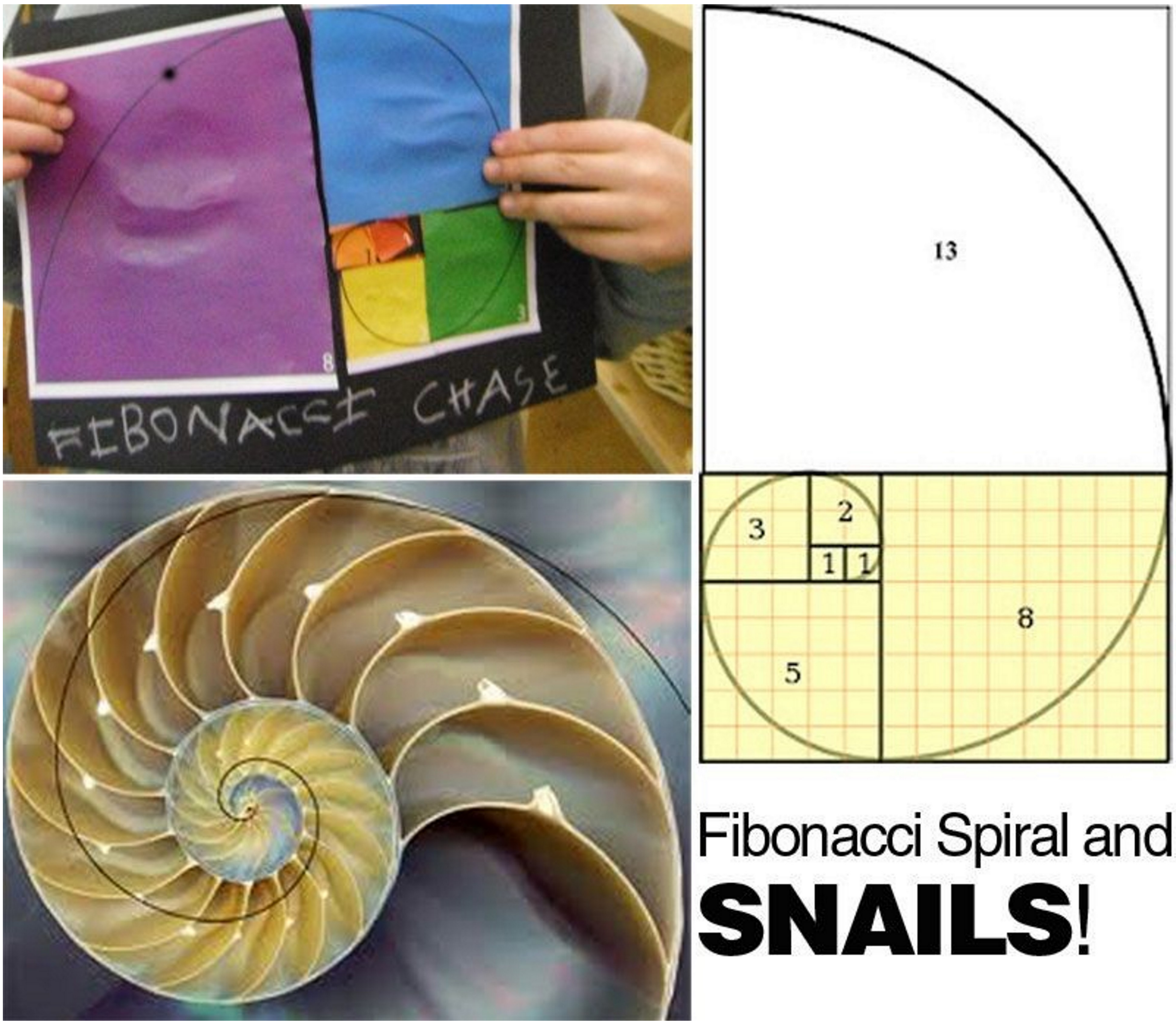
(a_ν) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

$\nu-2$ $\nu-1$ ν

Ακολουθία Fibonacci

$a_1 = a_2 = 1$

$a_\nu = a_{\nu-1} + a_{\nu-2}$



(a_ν) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$

$a_\nu = 2^\nu$ γενικός όρος

$$\left.\begin{array}{l} a_\nu = 2\cdot a_{\nu-1} \\ a_1 = 1 \end{array}\right\}$$ αναδρομικός τύπος

Άσκηση 2 σελ 124

Άσκηση 2 σελ. 124

i) $\begin{cases} a_1 = 2 & \text{αρχικός όρος} \\ a_{\nu+1} = \dfrac{1}{a_\nu} & \text{αναδρομικός τύπος} \end{cases}$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Γενικά: $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots$

$$a_\nu = \begin{cases} 2, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$$

$a_\nu = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$

ii) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{\nu+1} = a_\nu^2 + 1 \end{cases}$

πρώτος όρος (αρχικός όρος)

αναδρομική σχέση

(αναδρομικός τύπος)

$a_1 = 0$

$a_2 = a_1^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$

$a_3 = a_2^2 + 1 = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3^2 + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$a_5 = a_4^2 + 1 = 5^2 + 1 = 25 + 1 = 26$

iii) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{\nu+1} = 2(a_\nu - 1) \end{cases}$

$a_1 = 3$

$a_2 = 2 \cdot (3-1) = 2 \cdot 2 = 4$

$a_3 = 2(4-1) = 2 \cdot 3 = 6$

$a_3 = 2(4-1) = 2 \cdot 3 = 6$

$a_4 = 2(6-1) = 2 \cdot 5 = 10$

$a_5 = 2(10-1) = 2 \cdot 9 = 18$

Άσκηση 3 σελ. 124

(Αφού πρώτα βρείτε τους 5 πρώτους όρους)

i) $a_\nu = \nu + 5$

$a_1 = 1 + 5 = 6$

$a_2 = 2 + 5 = 7$

$a_3 = 3 + 5 = 8$ +1

$a_4 = 4 + 5 = 9$ +1

$a_5 = 5 + 5 = 10$

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_\nu = a_{\nu-1} + 1 \end{cases}$$

αρχικός όρος

αναδρομικός τύπος

ii) $a_\nu = 2^\nu$

$a_1 = 2^1 = 2$

$a_2 = 2^2 = 4$

$$a_2 = 2^2 = 4$$

$$a_3 = 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2}_{4} \cdot 2 = 8$$

$$a_4 = 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{8} \cdot 2 = 16$$

$$a_5 = 2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^4} \cdot 2 = 2^4 \cdot 2 = a_4 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$$

$$a_v = 2 \cdot 2^{v-1} = 2 \cdot a_{v-1}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_v = 2 \cdot a_{v-1} \end{cases}$$

iii) $a_v = 2^v - 1$

$$a_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$a_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$a_4 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$a_5 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$$

$$a_v = 2^v - 1$$

$$= 2 \cdot 2^{v-1} - 1 =$$

$$= 2\left(\underbrace{2^{v-1} - 1}_{} + 1\right) - 1$$

$$= 2 \cdot (\underbrace{a_{v-1}}_{} + 1) - 1$$

$$= 2a_{v-1} + 2 - 1$$

$$= 2a_{v-1} + 1$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_v = 2a_{v-1} + 1 \end{cases}$$

iv) $a_v = 5v + 3$

$a_1 = 5 \cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$

$a_2 = 5 \cdot 2 + 3 = 10 + 3 = 13$

$a_3 = 5 \cdot 3 + 3 = 15 + 3 = 18$

$a_4 = 5 \cdot 4 + 3 = 20 + 3 = 23$

$a_5 = 5 \cdot 5 + 3 = 25 + 3 = 28$

$$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_v = a_{v-1} + 5 \end{cases}$$

Άσκηση 4 πως παίρνω το γενικό όρο

όταν γνωρίζω τον αναδρομικό τύπο

i) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{\nu+1} = a_\nu + 2 \end{cases}$

$a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$

$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7$

$a_{\nu+1} = a_\nu + 2 = (a_{\nu-1} + 2) + 2 = a_{\nu-1} + 2 \cdot 2$

$= a_{\nu-2} + 3 \cdot 2 = \dots = a_1 + \nu \cdot 2 = 2\nu + 1$

$a_\nu = 2\nu - 1$

ii) $a_1 = 3$

$a_{\nu+1} = 5 a_\nu$

$a_1 = 3$

$a_2 = 5 a_1 = 5 \cdot 3 = 15$

$a_3 = 5 \cdot a_2 = 5 \cdot 15 = 75$

$a_3 = 5 \cdot a_2 = 5 \cdot 15 = 75$

Παρατηρώ ότι

$a_3 = 5 \cdot (5 \cdot 3) = 5^2 \cdot 3$

$a_4 = 5 a_3 = 5 \cdot 5^2 \cdot 3 = 5^3 \cdot 3$

$a_5 = 5^4 \cdot 3$

Επίσης,

$a_1 = 5^0 \cdot 3$

Γενικά, $a_\nu = 5^{\nu-1} \cdot 3$