

4.2 Ασκήσεις από τράπεζα θεμάτων ΜΕΡΟΣ Β'

Τετάρτη, 3 Μαρτίου 2021 4:15 μμ

ΑΣΚΗΣΗ 8 (2_1278)

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $d(x, -2) < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$

Μονάδες 15

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$

Μονάδες 10

Λύση

α) $d(x, -2) < 1$

$$|x + 2| < 1$$

$$-1 < x + 2 < 1$$

$$-1 - 2 < x < 1 - 2$$

$$\boxed{-3 < x < -1}$$

Θυμίζω αν $p > 0$

$$d(x, a) < p \Leftrightarrow$$

$$|x - a| < p \Leftrightarrow$$

$$-p < x - a < p$$

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$p_{1,2}: x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1 \begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix}$$

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$x^2 + 4x + 3$	$+$	ϕ	ϕ	$+$

'Αρα $x^2 + 4x + 3 < 0$ αν και μόνο αν $-3 < x < -1$ που ισχύει

ΑΣΚΗΣΗ 10 (2_1297)

α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$3x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

Μονάδες 12

β) Αν α, β δύο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

Μονάδες 13

Λύση

$$p(x) = 3x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$$

$$= 16 - 12$$

$$= 4$$

$$\frac{2+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Πι> του τελενύτου: $x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \frac{2 \pm 1}{3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2+1}{3} = 1 \\ \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \end{array} \right.$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$p(x)$	$+$	ϕ	ϕ	$+$

$$\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

3

$$x \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right]$$

β | α λύση της ανισότητας $6\alpha \leq 6$

$$\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1$$

β λύση της ανισότητας $6\beta \leq 6$

$$\frac{1}{3} \leq \beta \leq 1$$

Θα δείξω ότι:

$$\frac{3\alpha + 6\beta}{9} \text{ λύση της ανισότητας}$$

$$\text{δηλαδή ότι } \frac{1}{3} \leq \frac{3\alpha + 6\beta}{9} \leq 1$$

Εκχώρε:

$$\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1$$

$$\frac{1}{3} \leq \beta \leq 1$$

$$3 \cdot \frac{1}{3} \leq 3\alpha \leq 3 \cdot 1 \quad 6 \cdot \frac{1}{3} \leq 6\beta \leq 6 \cdot 1$$

$$1 \leq 3\alpha \leq 3 \quad 2 \leq 6\beta \leq 6$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{+}$$

$$1+2 \leq 3\alpha + 6\beta \leq 3+6$$

$$3 \leq 3\alpha + 6\beta \leq 9$$

$$\frac{3}{9} \leq \frac{3\alpha + 6\beta}{9} \leq \frac{9}{9}$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{3\alpha + 6\beta}{9} \leq 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 11 (2_1512)

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$

Μονάδες 8

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 12

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Λύση

α) $x^2 - x - 2 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Οι ρίζες είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$

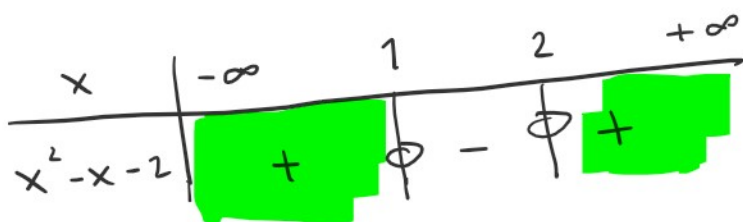
$$x^2 - x - 2 > 0$$

β)

1. Στο πίνακα:

β)

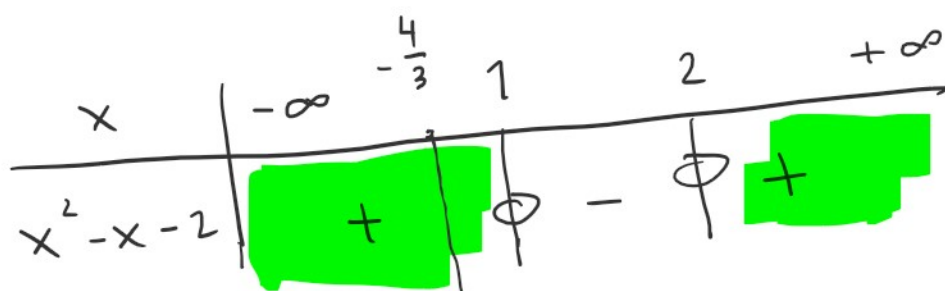
και οι τιμές:



$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 2$$

γ)



$$-\frac{4}{3} < 1 \quad \text{αλλά} \quad -\frac{4}{3} < 0 \quad \text{επομένως}$$

είναι λύση της ανίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ 12 (2_1544)

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Μονάδες 10

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

Μονάδες 15

Λύση

α)

$$x^2 + 4x + 5 > 0$$

Λύση

a) $x^2 + 4x + 5 > 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

Επομένως, το τριώνυμο είναι πάντα θετικό
(Ορίζοντας τον συντελεστή του x^2)

Άρα η ανίσωση ισχύει πάντα

b)
$$B = \underbrace{|x^2 + 4x + 5|} - \underbrace{|x^2 + 4x + 4|}$$

Για να βάλω τις απόλυτες τιμές να αφαιρεθεί
να ελέγξω το πρόσημο των τριωνύμων

$$|x^2 + 4x + 5| = x^2 + 4x + 5 \text{ αφού } x^2 + 4x + 5 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$|x^2 + 4x + 4| = |(x+2)^2| = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

Άρα

$$B = x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 4)$$

$$= \cancel{x^2} + \cancel{4x} + 5 - \cancel{x^2} - \cancel{4x} - 4$$

$$= 5 - 4$$

$$= 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_484)

i. Να λύσετε τις ανισώσεις $|2x-5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$

(Μονάδες 16)

ii. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α).

(Μονάδες 9)

Λύση

i) $|2x-5| \leq 3$

$$-3 \leq 2x-5 \leq 3$$

$$5-3 \leq 2x \leq 5+3$$

$$2 \leq 2x \leq 8$$

$$\frac{2}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{8}{2}$$

$$1 \leq x \leq 4$$

Θύμηση

$$|x| < p \quad p > 0$$

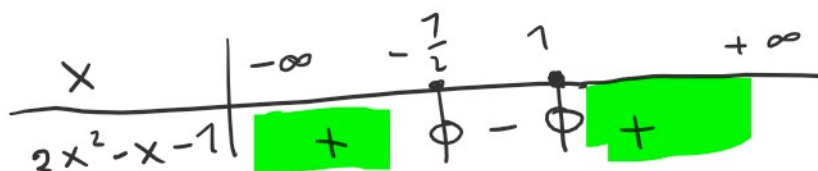
$$-p < x < p$$

$$2x^2 - x - 1 \geq 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

Ρίζες του τριωνύμου

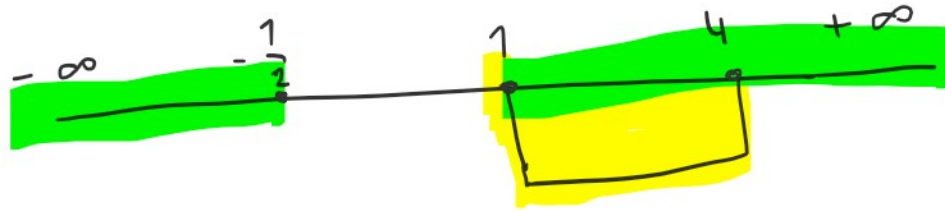
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$



$$x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{in} \quad x \geq 1$$

$$x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$$

ii)



közvetlen szűkítés

01 közvetlen szűkítés zival $x \in [1, 4]$

$$(1 \leq x \leq 4)$$