

3.1 Ασκήσεις τράπεζας θεμάτων

Τρίτη, 12 Ιανουαρίου 2021 12:08 μμ

1 Θέμα 2 - 1246

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

β. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α. Για $\lambda = 1$:

$$(1^2 - 1)x = (1 + 1)(1 + 2)$$

$$0x = 2 \cdot 3$$

$$0x = 6 \quad \text{αδύνατη}$$

Για $\lambda = -1$

$$\left((-1)^2 - 1\right)x = (-1 + 1)(-1 + 2)$$

$$0x = 0 \cdot 1$$

$$0x = 0 \quad \text{ταυτότητα}$$

$$\beta. \quad (\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$$\text{πρέπει} \quad \lambda^2 - 1 \neq 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0$$

$$\lambda - 1 \neq 0 \quad \text{και} \quad \lambda + 1 \neq 0$$

$$\lambda \neq 1$$

$$\text{και} \quad \lambda \neq -1$$

2 Θέμα 2 - 1351

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

β. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ. Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

$$\alpha. \quad \lambda x = x + \lambda^2 - 1$$

$$\lambda x - x = \lambda^2 - 1 \quad \leftarrow \text{διαφορά τετραγώνων}$$

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$\beta. \quad \text{πρέπει} \quad \lambda - 1 \neq 0$$

$$\lambda \neq 1$$

$$\gamma. \quad \underbrace{(\lambda - 1)x}_{=0} = \underbrace{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}_{=0}$$

Πρ ος α

$$\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

3 Θέμα 2 - 1369

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

- α. Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.
- β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.
- γ. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

Λύση

α. Επιλέγω

$$\lambda = 3$$

$$(3^2 - 9)x = 3^2 - 3 \cdot 3$$

$$(9 - 9)x = 9 - 9$$

$$0x = 0$$

Επιλέγω

$$\lambda = 2$$

$$(2^2 - 9)x = 2^2 - 3 \cdot 2$$

$$(4 - 9)x = 4 - 6$$

$$-5x = -2$$

Επιλέγω

$$\lambda = 4$$

$$(4^2 - 9)x = 4^2 - 3 \cdot 4$$

$$(16-9)x = 16-12$$

$$7x = 4$$

$$\beta. \quad \text{Prin } \lambda^2 - 9 \neq 0$$

$$(\lambda-3)(\lambda+3) \neq 0$$

$$\lambda \neq 3 \quad \text{ka} \quad \lambda \neq -3$$

$$\gamma. \quad (\lambda^2 - 9) \cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda \quad *$$

$$4\lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 3\lambda$$

$$4\lambda^2 - \lambda^2 - 36 + 3\lambda = 0$$

$$3\lambda^2 + 3\lambda - 36 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$= 1 + 4 \cdot 12$$

$$= 49$$

$$\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$\lambda = \frac{-1-7}{2} \quad \text{u} \quad \lambda = \frac{-1+7}{2}$$

$$\lambda = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ή} \quad \lambda = \frac{6}{2}$$

$$\boxed{\lambda = -4}$$

$$\text{ή} \quad \lambda = 3 \quad \text{απορρίπτεται}$$

* Πρέπει (από το P' σημείο) $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$

4 Θέμα 2 - 1327

Δίνεται η εξίσωση: $(a+3)x = a^2 - 9$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. όταν $a=1$

ii. όταν $a=-3$

β. Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

Λύση

$$\alpha. \quad i) \quad (1+3)x = 1^2 - 9$$

$$4x = -8$$

$$x = -\frac{8}{4}$$

$$\boxed{x = -2}$$

$$ii) \quad (-3+3)x = (-3)^2 - 9$$

$$0x = 9-9$$

$$0x = 0 \quad \text{ταυτότητα}$$

β. Για να έχει μοναδική λύση πρέπει

$$a+3 \neq 0$$

$$a \neq -3$$

$$x = \frac{a^2-9}{a+3}$$

$$x = \frac{(a-3)(\cancel{a+3})}{\cancel{a+3}}$$

$$x = a-3$$