

2.2 Ασκήσεις Τράπεζας Θεμάτων

Τρίτη, 5 Ιανουαρίου 2021 12:14 μμ

4 Θέμα 2 – 1287

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2a^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2a\beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των a, β .

β. Για ποιες τιμές των a, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση α) $K \geq \Lambda$

$$2a^2 + \beta^2 \geq 2a\beta$$

$$2a^2 + \beta^2 - 2a\beta \geq 0$$

$$a^2 + \underbrace{a^2 - 2a\beta + \beta^2}_{(a-\beta)^2} \geq 0$$

$$a^2 + (a-\beta)^2 \geq 0 \quad \text{ισχύει}$$

β) Για να ισχύει $K = \Lambda$ πρέπει

$$a^2 + (a-\beta)^2 = 0$$

↑

θετικός
ή
μηδέν

↑

θετικός
ή
μηδέν

Άρα αναγκαστικά

$$a^2 = 0 \quad \text{και} \quad (a-\beta)^2 = 0$$

$$a = 0 \quad \text{και} \quad a - \beta = 0$$

$$a = \beta$$

$$\beta = 0$$

Θυμίζω $x^2 \geq 0$
για κάθε τιμή του x

5 Θέμα 2 - 1353

α. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

Λύση

$$\alpha. (x-1)^2 + (y+3)^2 =$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 =$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

$$\beta. x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$$

↑ ↑
θετικός θετικός
 " "
μηδέν μηδέν

Άρα αναγκαστικά

$$(x-1)^2 = 0 \quad \text{και} \quad (y+3)^2 = 0$$

$$x-1=0 \quad \text{και} \quad y+3=0$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\text{και} \quad \boxed{y=-3}$$

Παρατήρηση:

$$A^2 + B^2 = 0 \Rightarrow A = B = 0$$

$$(A=0 \text{ και } B=0)$$

$$AB=0 \Rightarrow A=0 \text{ ή } B=0$$

6 Θέμα 2 - 1317

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2a^2 + b^2 + 9$ και $\Lambda = 2a(3-b)$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 6a + 9)$.

β. Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των a, b .

γ. Για ποιες τιμές των a, b ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha. K - \Lambda &= 2a^2 + b^2 + 9 - 2a(3-b) \\ &= \overset{a^2+a^2}{2a^2} + b^2 + 9 - 6a + 2ab \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 6a + 9) \end{aligned}$$

$$\beta. K \geq \Lambda$$

$$K - \Lambda \geq 0$$

$$(a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 6a + 9) \geq 0$$

$$(a+b)^2 + (a-3)^2 \geq 0 \quad \text{ΙΣΧΥΕΙ}$$



↑
ο επιλογής
ή
πρωτεύ

T
ο επιλογής
ή
πρωτεύ

γ. $K = \Lambda$

$$K - \Lambda = 0$$

$$(a + \beta)^2 + (a - 3)^2 = 0$$

$$a + \beta = 0 \quad \text{και} \quad a - 3 = 0$$

$$a = 3 \quad \text{και} \quad \beta = -a$$

$$\boxed{a = 3} \quad \text{και} \quad \boxed{\beta = -3}$$