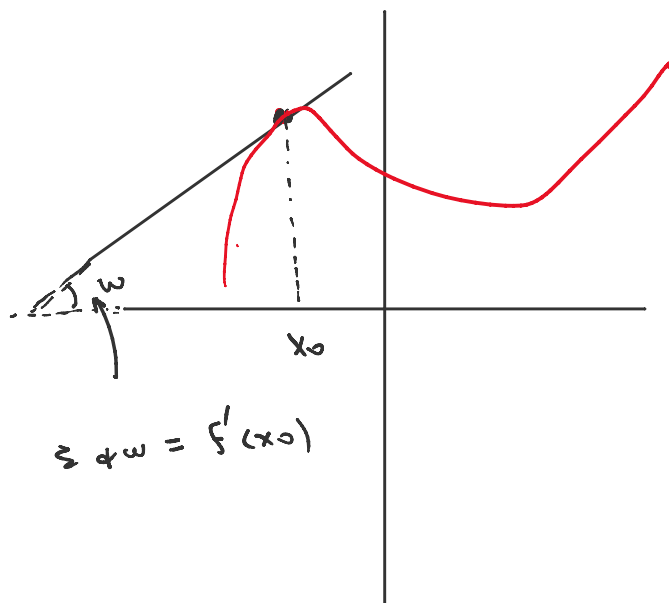
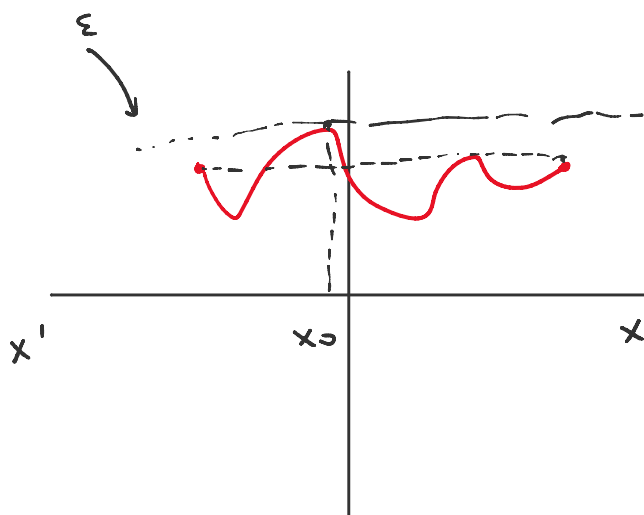


2.5 Θεώρημα Rolle

Τρίτη, 2 Μαρτίου 2021 6:14 μμ



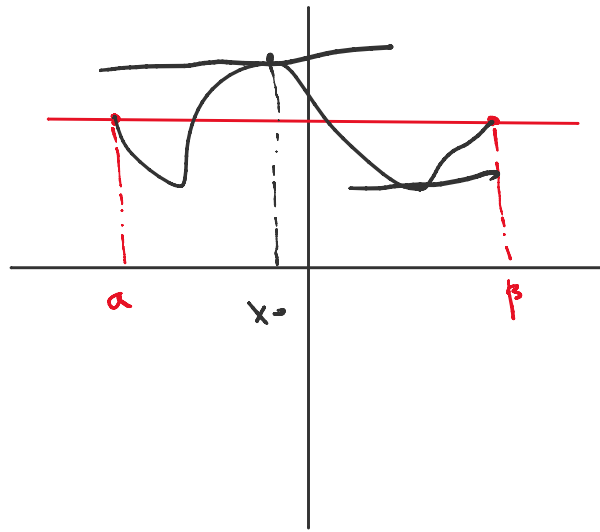
Θυμήτω ότι για μια συνάρτηση f
η παράγωγός της στο x_0 $f'(x_0)$
είναι η κλίση της εφαπτομένης της
Cf στο x_0





«Αν έχω δύο σημεία $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$
 τότε υπάρχει κάποιο x_0 τέτοιο ώστε η εφαπτομένη
 $\varepsilon \parallel xx' \quad (\lambda \varepsilon = 0)$ »

— Michel Rolle



Θέωρημα Rolle

- Αν συνάρτηση f
- 1) συνεχής στο κλειστό $[a, b]$
 - 2) παραγωγίσιμη στο ανοικτό (a, b)
 - 3) $f(a) = f(b)$

Τότε υπάρχει $\zeta \in (a, b)$:

$$f'(\zeta) = 0$$

Εφαρμογή

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - (2+1)x$$

ορίσμε στο $[0, 1]$;

$$f(x) = \lambda x^3 + x^2 - (\lambda + 1)$$

Ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ.Κ. Rolle στο $[0,1]$;

i)

1) f συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική

2) f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική

$$f' = f'(x) = 3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1)$$

$$3) \quad f(0) = \lambda \cdot 0^3 + 0^2 - (\lambda + 1) \cdot 0 = 0$$

$$f(1) = \lambda \cdot 1^3 + 1^2 - (\lambda + 1) \cdot 1 =$$

$$= \lambda + 1 - (\lambda + 1) = 0$$

$$f(0) = f(1)$$

ii)

$$3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1) = 0 \quad \text{έχει τον μέγιστο}$$

$$\text{για } x \in (0,1)$$

Από το προηγούμενο ερώτημα : Υπάρχει $\xi \in (0,1)$:

$$f'(\xi) = 0$$

$$3\lambda \xi^2 + 2\xi - (\lambda + 1) = 0$$

Άσκηση 1

i) $f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad x \in [0, 2]$

f συνεχής στο $[0, 2]$ ως πολυωνυμική

f παραγωγ. στο $(0, 2)$ —||—

π.ε $f'(x) = 2x - 2$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 4 - 4 + 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = f(2)$$

ii) $f(x) = \eta\pi 3x \quad x \in \left[0, \frac{2\eta}{3}\right]$

$(x)' = 1$

$(cf)' = c f'$

f συνεχής στο $\left[0, \frac{2\eta}{3}\right]$ ως τετραγωνική

f παραγωγ. στο $\left(0, \frac{2\eta}{3}\right)$ —||—

π.ε $f'(x) = (\eta\pi 3x)' = \sin 3x \cdot (3x)' = 3 \sin 3x$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \eta\pi 0 = 0 \\ f\left(\frac{2\eta}{3}\right) = \eta\pi 2\eta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = f\left(\frac{2\eta}{3}\right)$$

iii) $f(x) = 1 + \sin 2x \quad x \in [0, \eta]$

f συνεχής στο $[0, \eta]$ ως πεπεσμένη συνεχής

f παραγωγική στο $(0, \eta)$ —||—

π.ε $f'(x) = -\eta\pi 2x \cdot (2x)' = -2\eta\pi 2x$

$$f(0) = 1 + \sin(2 \cdot 0) = 1 + \sin 0 = 1 + 1 = 2 \quad \left. \vphantom{f(0)} \right\} \Rightarrow$$

$$f(n) = 1 + \sin(2n) = 1 + \sin 0 = 1 + 1 = 2$$

$$f(0) = f(n)$$

$$\text{iv) } f(x) = |x| \quad x \in [-1, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } 0$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

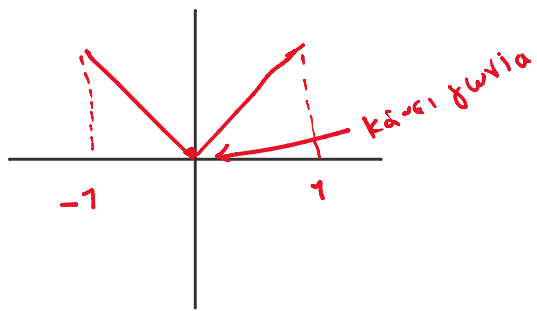
f συνεχής στο $[-1, 0)$ και στο $(0, 1]$ ως πολυωνυμική

f συνεχής στο $[-1, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Δεν είναι παραγώγιμη στο 0.



- Οι i-iii ικανοποιούν τις συνθήκες του θ.π.112
 Η iv δεν ικανοποιεί