ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Το ΘΕΜΑ Α
των Πανελλαδικών εξετάσεων

Για τον υποψήφιο των Πανελλαδικών εξετάσεων
2021

Έκδοση
Μάρτιος 2021

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΌΡΙΟ & ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Τι ονομάζουμε πραγματική **συνάρτηση** με πεδίο ορισμού Α;
2. Τι ονομάζουμε **γραφική παράσταση** συνάρτησης;
3. Πότε δύο συναρτήσεις λέγονται **ίσες**;
4. Τι ονομάζουμε **σύνθεση** δύο συναρτήσεων f & g με πεδία ορισμού Α & Β αντίστοιχα;
5. Πότε μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως αύξουσα** και πότε **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
6. Πότε μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως αύξουσα** και πότε **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
7. Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει **ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο** στο χ_0 του πεδίου ορισμού της;
8. Πότε μια συνάρτηση παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο** στο χ_0 του πεδίου ορισμού της;
9. Πότε μια συνάρτηση λέγεται **1-1**;
10. Τι ονομάζουμε **αντίστροφη** μιας συνάρτησης;
11. Ποια η σχέση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της;
12. Πότε μια συνάρτηση λέγεται **συνεχής στο χ_0** του πεδίου ορισμού της;
13. Πότε μια συνάρτηση λέγεται **συνεχής** σε ένα **ανοικτό** διάστημα (α, β);
14. Πότε μια συνάρτηση λέγεται **συνεχής** σε ένα **κλειστό** διάστημα [α, β];
15. Να **διατυπώσετε** το κριτήριο παρεμβολής
16. Να **διατυπώσετε** το θεώρημα του Bolzano
17. Να **διατυπώσετε** το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής
18. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Β. ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

19. Αν $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in R$ **να αποδείξετε** ότι $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

20. **Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών**

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$

21. Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Α. ΟΡΙΣΜΟΙ

22. Τι ορίζουμε **εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο $A(\chi_0, f(x_0))$;
23. Πότε μια συνάρτηση είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα **σημείο** χ_0 του πεδίου ορισμού της;
24. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα ανοικτό **διάστημα** (α,β)
25. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι **παραγωγίσιμη** σε **κλειστό** διάστημα [α, β];
26. Τι ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** ενός μεγέθους y ως προς το μέγεθος χ στο σημείο χ_0;
27. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει στο χ_0 του πεδίου ορισμού της **τοπικό μέγιστο** και πότε **τοπικό ελάχιστο**;
28. Ποιές είναι οι πιθανές **θέσεις** τοπικών **ακροτάτων** μιας συνάρτησης;
29. Να διατυπώσετε το θεώρημα **Rolle**
30. Ποια η **γεωμετρική ερμηνεία** του θεωρήματος **Rolle**;
31. Να διατυπώσετε το **θεώρημα μέσης τιμής** του Διαφορικού Λογισμού.
32. Ποια η **γεωμετρική ερμηνεία** του θεωρήματος μέσης τιμής;
33. Να διατυπώσετε το θεώρημα του **Fermat**
34. Ποια σημεία λέγονται **κρίσιμα σημεία** μιας συνάρτησης f;
35. Πότε μια συνάρτηση λέγεται **κυρτή και πότε κοίλη**;
36. Πότε ένα σημείο $(\chi_0, f(x_0))$ λέγεται **σημείο καμπής**;
37. Πότε η ευθεία $\chi=\chi_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;
38. Πότε η ευθεία y=l λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;
39. Πότε η ευθεία $y=\lambda\chi+\beta$ λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;
40. Να διατυπώσετε τα θεωρήματα del **l' Hospital**
41. Πως σχετίζεται η δεύτερη παράγωγος με την κυρτότητα μιας συνάρτησης

Β. ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

42. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, **να αποδείξετε** ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό
43. Εστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in R$. **Να αποδείξετε ότι** η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή (c)'=0
44. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. **Να αποδείξετε ότι** η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$
45. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^v$, $v\in N-\{0,1\}$. **Να αποδείξετε ότι** η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=vx^{v-1}$, δηλαδή $(x^v)'=vx^{v-1}$

46. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. **Να αποδείξετε ότι** η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

47. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, **να αποδείξετε ότι** η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

48. Να **αποδείξετε** ότι (cf(x))'=cf'(x)

49. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in N^*$. **Να αποδείξετε ότι** η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}$

50. Έστω η συνάρτήση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. **Να αποδείξετε ότι** η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=R-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

51. **Να αποδείξετε ότι** η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in R-Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$

52. **Να αποδείξετε ότι η** συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$, δηλαδή $(\alpha^x)'=\alpha^x\ln\alpha$

53. **Να αποδείξετε ότι η** συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$

54. Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- η *f* είναι συνεχής στο *Δ* και
- $f'(x)=0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*,

Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα *Δ*.

55. Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- οι f,g είναι συνεχείς στο *Δ* και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*,

Να αποδείξετε ότι τότε υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$

56. Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα *Δ*.

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, **να αποδείξετε ότι** η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, **να αποδείξετε ότι** τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το *Δ*.

57. **Θεώρημα Fermat:** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του *Δ*. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, **να αποδείξετε ότι** $f'(x_0)=0$

58. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), **να αποδείξετε ότι** τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της *f*.

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), **να αποδείξετε ότι** τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της *f*.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, **να αποδείξετε ότι** τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).