ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ STUDY4EXAMS.GR

Α΄ΟΜΑΔΑ

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\alpha^x - x,\ x\in\mathbb{R},\ 0<\alpha<1$.

ii. $g(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}},\ x>0$.

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i. $f(x)=e^{x^3-12x}$

ii. $g(x)=\ln(x^2+2x+3)$

3. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} -2x^3+3x^2+1, & x\le 1 \\ (x-1)\ln x + x + 1, & x>1 \end{cases}$

4. Να προσδιοριστεί το $\lambda\in\mathbb{R}^*$, ώστε η συνάρτηση: $f(x)=\frac{e^x}{\lambda^2+x^2}$, να είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+3)-(x+2)+\frac{(x+2)^2}{2}+2011,\ x\ge 0$.

Να βρείτε το πρόσημο της f.

6.

1. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2+x+\ln x-2=0$.
2. Να λυθεί η ανίσωση: $x+\ln x<1$.

7. Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu x^3-4x=\eta\mu 4x-x^3$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της.

ii. Για κάθε $x\in(0,1]$, να δειχθεί ότι: $e^{x-1}\ge x$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

9. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης: $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$

10. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2+x-1, & x<0 \\ \dfrac{x^3-e^x}{e^x}, & x\geq 0 \end{cases}$

11. Να προσδιοριστεί το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση: $f(x)=e^{\lambda x}\left(x^2+2x+2\right)$, να είναι γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

12. Να προσδιοριστεί το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση: $f(x)=\lambda x^3+3x^2+3\lambda x$, να είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=3e^{2x-4}+1,\ x\geq 2$

i. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να βρείτε την f^{-1}.

14. Έστω η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(4,+\infty\right)$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $16x+\left(f'\left(x\right)\right)^2=4x^2$, (1) για κάθε $x\in\left(4,+\infty\right)$ και $f'\left(5\right)>0$. Επίσης, η f' είναι συνεχής στο $\left(4,+\infty\right)$.

Να δείξετε ότι:

i. Η εξίσωση $f'\left(x\right)=0$ είναι αδύνατη στο $\left(4,+\infty\right)$.

ii. Η f είναι γν. αύξουσα στο $\left(4,+\infty\right)$.

15. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια το πολύ πραγματική ρίζα.

i. $5^x+3+6x=0$, $x\in\mathbb{R}$

ii. $2e^x-xe^x-3\alpha=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x>1$

16. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

i. $5x^4-6x+2011=0$

ii. $6^x+7^x+8^x=2010x-2011$

17. Να δείξετε ότι η παρακάτω εξίσωση έχει το πολύ τρείς άνισες πραγματικές ρίζες:

$2e^{3x}+2011=5x+4x^2$.

18. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $2x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 4x^2 + 16x - 2011 = 0$

19. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $[5,6]$, γνησίως αύξουσα και δυο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό.

Ακόμα $f''(x) > 0$ και $f'(6) = f(5) + f(6)$.

i. Να βρείτε το πρόσημο της f στο $[5,6]$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = (x-5)f'(x)$ έχει μια μόνο ρίζα στο $[5,6]$.

20. Να λυθεί η εξίσωση: $\ln x + 2 = \sqrt{5-x}$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f:[-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \frac{2\sqrt{1+x}}{2+x}$.

i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της.

ii. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = 1$, για τα $x \geq 0$.

22. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x^2 - x}{4x - 6} = e^{-x^2+5x-6}$.

23. Να δειχθεί ότι: $e^x < \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in (0,1)$.

24. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της η συνάρτηση f.

ii. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

iii. Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθούν τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

iv. Να λυθεί η ανίσωση: $f(x) \geq 1$.

v. Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}(x) = 1$.

25. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, με $f(x) = \left(e^x + 1\right)^{\frac{1}{x}}, x > 0$ και $g(x) = xe^x - \left(1 + e^x\right)\ln\left(1 + e^x\right)$.

i) Δείξτε ότι η συνάρτηση g είναι γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $g(x) < 0$.

iii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

26. Να προσδιοριστεί το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση: $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+\lambda x-2011$, να είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $f\left(1\right)=\frac{1}{e}$ και για την οποία ισχύει : $f'(x)+f(x)>x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $f(x)+1>x+e^{-x}$, για κάθε $x>1$.

28. Α. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)>0$ και $g'(x)<0$ να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Β. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g με τύπους $f(x)=e^x+2x$ και $g(x)=e^{-x}-x^3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο που βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

29. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\left(0,1\right)$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν ισχύουν ότι : $f\left(0\right)=1, f\left(1\right)=0$ και $f'\left(0\right)+f'\left(1\right)=0$ τότε :

α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=x$, έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0,1\right)$.

β) Να δειχθεί ότι υπάρχει εφαπτομένη του γραφήματος της f που σχηματίζει με τους άξονες συντεταγμένων ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

γ) Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_1\in\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,x_1\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[x_1,+\infty\right)$.

30. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{2x}}$.

Α. Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$.

Β. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της.

Γ. Να δειχθεί ότι $e^x>1+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Δ. Να δειχθεί ότι : $f(x)>1+\frac{1}{2x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

31. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει : $\left[f(x)\right]^3+f(x)=x^3+x^2+5x-2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της η συνάρτηση f.

Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(\kappa,\lambda)$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση $f(\kappa^2+\lambda^2-2)>1$, για κάθε $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

32. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $f'(x)<\lambda f(x), \lambda\in\mathbb{R}^*$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $f(0)=c, c\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=ce^{\lambda x}$. Να μελετηθεί η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h, για τα $x\in D_f\cap D_h$.

33. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2e^x+2x-x^2-2=0$, $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$.

34. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της η συνάρτηση f.

β) Να δειχθεί ότι : $\dfrac{(\eta\mu x)^x}{x^{\eta\mu x}}>\dfrac{\eta\mu x}{x}$, για κάθε $x\in(0,1)$.

Γ΄ ΟΜΑΔΑ

35. Αν $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, τότε να δειχθεί ότι: $x^3\sigma\upsilon\nu x<\eta\mu^3 x$.

36. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f'(x)>2x-\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $g(x)=f(x)-x^2-\sigma\upsilon\nu x$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $g(x)=0$, έχει, μία το πολύ, πραγματική ρίζα.

iii. Για κάθε $x\geq 0$, να δειχθεί ότι: $f(x)\geq x^2+\sigma\upsilon\nu x$.

iv. Να λυθεί η ανίσωση: $g(x)+1\geq f(0)$.

v. α) Αν $v(x)\leq h(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=+\infty$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=+\infty$.

β) Να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+x\ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία της.

ii. Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq x-x^2$, για κάθε $x\geq 1$.

iii. α) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\ln x\leq x-1$, για κάθε $x>0$.

β) Να αποδείξετε ότι $e^x > x > \ln x$, για κάθε $x\geq 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^x > x-x^2$, για κάθε $x\geq 1$.

38. Α. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $e^x+x-5=0$, έχει μοναδική λύση στο $(0,2)$.
Β. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln(5-x)$.

1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της.
2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
3. Να μελετηθεί ως προς το πλήθος των ριζών της.
4. Έστω $\alpha\in(0,2)$, ρίζα της εξίσωσης του (Α) ερωτήματος ,τότε να δειχθεί ότι : $f(\alpha)=\alpha$.
5. Για κάθε $x\in[0,3]$, να δειχθεί ότι: $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.
6. Για κάθε $x\in[0,3]$, να δειχθεί ότι : $|f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

39. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και τέτοια, ώστε

$$f'(x)\neq -2f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=e^{2x}f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Μ(0,-1) και $N(2,-2e^{-4})$, να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $-2e^{-2x}<f(x)<-e^{-2x}$ για κάθε $x\in(0,2)$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $-2e^{-2x}\leq f'(x)+2f(x)\leq -e^{-2x}$, για κάθε $x\in(1,2)$, τότε να αποδείξετε ότι : $-e^{-2}\leq f(1)\leq 0$.

40. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της .
ii. Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{2}ημ^2x=3ημx-\sqrt{2}$, **(1).**
iii. Να δειχθεί ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$ τέτοια, ώστε : $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$.

41. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{x}+x-\ln^2 x-2$, $x>0$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της η συνάρτηση f.
β) Να δειχθεί ότι: $\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\geq\frac{\ln^2 x}{x}$, για κάθε $x>0$.
γ) Να δειχθεί ότι: $e^x\geq x^e$, για κάθε $x\geq e$.
δ) Να δειχθεί ότι: $\left(e^x-1\right)^2\geq x^{e+2}$, για κάθε $x\geq e$.

42. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$2xf'\left(x^2\right)+συνxf'(ημx)>e^x,$$

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν ένα τουλάχιστον $\xi_1\in\mathbb{R}$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει: $\pi f'(\xi_1)>e^{\xi_2}$.