Εύρεση του συνόλου τιμών

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και γνησίως μονότονη στο Δ.

Αν $\Delta = [\alpha, \beta]$ και $f \uparrow$ $\quad f(\Delta) = [f(\alpha), f(\beta)]$

$\Delta = (\alpha, \beta)$ και $f \uparrow$ $\quad f(\Delta) = \left(\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x), \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)\right)$

Αν $\Delta = [\alpha, \beta]$ και $f \downarrow$ $\quad f(\Delta) = [f(\beta), f(\alpha)]$

$\Delta = (\alpha, \beta)$ και $f \downarrow$ $\quad f(\Delta) = \left(\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x), \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)\right)$

Εφαρμογή

Δίνεται η $f(x) = e^x - \frac{1}{x} - 5$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να δείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει μοναδική θετική λύση.

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) $\Delta = (0, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο Δ ως π.σ.σ.

$x_1, x_2 \in \Delta$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$

$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} - 5 < -\frac{1}{x_2} - 5$

Προσθέτω κατά μέλη οπότε:

$$e^{x_1} - \frac{1}{x_1} - 5 < e^{x_2} - \frac{1}{x_2} - 5$$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ συνεπώς $f \uparrow$ στο Δ

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Συνεπώς $f \nearrow$ στο Δ

άρα $f(\Delta) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x - \frac{1}{x} - 5\right) = 1 - (+\infty) - 5 = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(e^x - \frac{1}{x} - 5\right) = +\infty - 0 - 5 = +\infty$$

οπότε $f(\Delta) = \mathbb{R}$

β) $f(x) = 0$

Το $0 \in f(\Delta) = \mathbb{R}$ και η f είναι γν. αύξουσα στο Δ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta$ ώστε $f(x_0) = 0$.

γ) $f(x) = \alpha$

Επειδή $\alpha \in \mathbb{R} = f(\Delta)$ και $f \nearrow \Delta$ η $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική λύση $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Άσκηση

Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1) + 1, & x > 0 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και να βρείτε το Σ.Τ.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x) - 2\right) = 1$ (1) έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες.

γ. Αν x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ οι ρίζες της (1) να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x) - 4}{x - x_2} + \dfrac{f(3 - f(x)) - 2}{x - x_1} = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (x_1, x_2)

δ. Να δείξετε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f\left(f^3(x)\right) \geq f\left(f^2(x)\right)$.

δ. Να δείξετε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(f(x)) \geq f(f(x))$.

Λύση

α. για $x<0$ η f είναι συνεχής ως π.σ.σ.

για $x>0$ η f είναι συνεχής ως π.σ.σ.

για $x=0$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(e^{-x}-x) = 1-0=1 \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\ln(x+1)+1) = 1. \\ &f(0)=1 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$\Delta_1 = (-\infty, 0]$ $\quad f(x) = e^{-x}-x$ συνεχής στο Δ_1 και

για $x_1, x_2 \in \Delta_1$ $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ $\quad f \downarrow \Delta_1$.

οπότε $\quad f(\Delta_1) = \left[f(0), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = [1, +\infty)$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}(e^{-x}-x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

$\Delta_2 = (0, +\infty)$ $\quad$ Συνέχεια τη Δευτέρα . 7/12/20.