

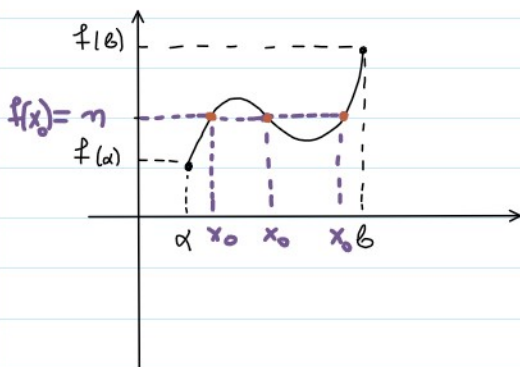
Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών. (Θ.Ε.Τ.)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, b]$

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) \neq f(b)$

Τότε για κάθε η μεταξύ των $f(a), f(b)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = \eta$

Απόδειξη



Έστω ότι $f(a) < f(b)$ και $f(a) < \eta < f(b)$ (1)
Θεωρώ τη $g(x) = f(x) - \eta$ $x \in [a, b]$.

Η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $g(a) \cdot g(b) < 0$ αφού

$$g(a) = f(a) - \eta < 0 \text{ από (1)}$$

$$g(b) = f(b) - \eta > 0 \text{ από (1)}$$

Αρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ ώστε $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \eta$

(Σχολικό βιβλίο σελ 76.)

Βασικές Ασκήσεις.

1η) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και γι. αύξουσα στο $[0, 1]$.
Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{1}{3}) + 3f(\frac{1}{4})}{6}$$

Λύση

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \xrightarrow{f \uparrow} f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$$

$$0 < \frac{1}{3} < 1 \xrightarrow{f \uparrow} 2 \cdot f(0) < 2 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) < 2 \cdot f(1)$$

$$0 < \frac{1}{4} < 1 \xrightarrow{f \uparrow} \frac{3 \cdot f(0) < 3 \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) < 3 \cdot f(1)}{\text{Προσθέτω κατά μέλη}}$$

$$\cancel{6} f(0) < \frac{f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{1}{3}) + 3f(\frac{1}{4})}{6} < \cancel{6} f(1)$$

Επειδὴ η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0) \neq f(1)$ (Άρα $f \uparrow$)
υπάρχει ένα αυξανόμενο $x_0 \in (0,1)$ ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{1}{3}) + 3f(\frac{1}{4})}{6}$$

2m) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$(1) (f(x)-5) \cdot (f(x)+5) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την f .

Λύση

Έστω ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(\alpha) = 5 \quad \text{και} \quad f(\beta) = -5$$

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$
από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα αυξανόμενο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε
 $f(x_0) = 0$ άτοπο διότι

$$\begin{aligned} \text{για } x=x_0 \quad (1) &\Rightarrow (f(x_0)-5)(f(x_0)+5) = 0 \\ &\Rightarrow (0-5) \cdot (0+5) = 0 \\ &\Rightarrow -25 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f(x) = 5 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad f(x) = -5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε παίρνει πάνω
μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή μ

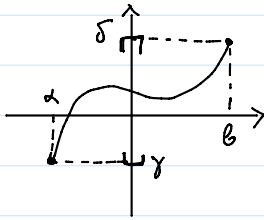
Δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ ώστε
 $f(x_1) = M$ και $f(x_2) = \mu$

$$\text{και} \quad \mu \leq f(x) \leq M$$

Σχολικό βιβλίο σελ 77.

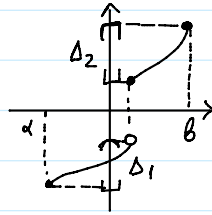
Θεώρημα

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.



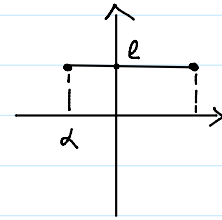
$$\Delta = [\alpha, \beta]$$

$$f(\Delta) = [\gamma, \delta]$$



$$\Delta = [\alpha, \beta]$$

$$f(\Delta) = \Delta_1 \cup \Delta_2$$



$$\Delta = [\alpha, \beta]$$

$$f(\Delta) = l$$

Άσκησης για λύση.

3.12 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και $x_1, x_2 \in [a, \beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = \frac{4f(x_1) + 2f(x_2)}{6}$

3.13 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και $x_1, x_2, x_3 \in [a, \beta]$ Αν κ, λ, ρ είναι θετικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ τέτοιος ώστε:

$$f(\xi) = \frac{\kappa f(x_1) + \lambda f(x_2) + \rho f(x_3)}{\kappa + \lambda + \rho}$$