

3η) Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$\alpha(x-\mu)(x-\nu) + b(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu) = 0$$

όπου $\alpha, b, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$, έχει ακριβώς δύο ρίζες
άνισες για διατεταγμένα (λ, μ) και (μ, ν)

Λύση

Θέτω $f(x) = \alpha(x-\mu)(x-\nu) + b(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu)$

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις των Θ.Βολζαγο για $[\lambda, \mu]$, $[\mu, \nu]$ αφού

- είναι συνεχής για $[\lambda, \mu]$, $[\mu, \nu]$ ως πολυωνυμική
- $f(\lambda) = \alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu) > 0$ $\lambda < \mu < \nu \Rightarrow \lambda-\mu < 0$ κ' $\lambda-\nu < 0$

$$f(\mu) = b(\mu-\lambda)(\mu-\nu) < 0 \quad \lambda < \mu < \nu \Rightarrow \mu-\lambda > 0 \text{ κ' } \mu-\nu < 0$$

$$f(\nu) = \gamma(\nu-\lambda)(\nu-\mu) > 0 \quad \lambda < \mu < \nu \Rightarrow \nu-\lambda > 0 \text{ κ' } \nu-\mu > 0$$

$$f(\mu) \cdot f(\lambda) < 0 \quad \text{και} \quad f(\mu) \cdot f(\nu) < 0$$

Γνωρίζουμε υπάρχουν ^{πρωτόκολλο} $x_1 \in (\lambda, \mu)$ και $x_2 \in (\mu, \nu)$ ώστε
 $f(x_1) = 0$ κ' $f(x_2) = 0$

Επειδή η f είναι πολυώνυμο του x έχει το πολύ δύο ρίζες. Άρα οι x_1, x_2 είναι μοναδικές.

4η) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{e^x}{x-1} = \frac{\ln x}{2-x}$$

έχει μια, τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$

Λύση

$$\frac{e^x}{x-1} - \frac{\ln x}{2-x} = 0 \Rightarrow \frac{e^x \cdot (2-x)}{(x-1)(2-x)} - \frac{(x-1) \cdot \ln x}{(x-1) \cdot (2-x)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e^x(2-x) - (x-1)\ln x}{(x-1)(2-x)} = 0$$

Θέτω $f(x) = e^x \cdot (2-x) - (x-1) \cdot \ln x$, $x \in [1, 2]$

Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως π. Γ. Γ.

$$f(1) = e^1(2-1) = e > 0$$

$$f(2) = -(2-1) \cdot \ln 2 = -\ln 2 < 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ ώστε

$$f(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow e^{x_0}(2-x_0) - (x_0-1) \ln x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e^{x_0}(2-x_0) - (x_0-1) \ln x_0}{(2-x_0)(x_0-1)} = 0$$

5η) Υπαρξη ρίζας σε κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, 1]$

με $0 \leq f(x) \leq 1$ και η ευθεία $y = -x + 1$.

Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y = -x + 1$ στο $[0, 1]$.

Λύση Θέτω $f(x) = -x + 1$

$$\Rightarrow f(x) + x - 1 = 0, \quad x \in [0, 1]$$

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - 1$, $x \in [0, 1]$

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξη συνεχών συναρτ.

$$g(0) = f(0) - 1 \leq 0 \quad \text{Από } 0 \leq f(0) \leq 1$$

$$g(1) = f(1) \geq 0 \quad \text{ } 0 \leq f(1) \leq 1$$

$$\text{Άρα } g(0) \cdot g(1) \leq 0$$

• 1η περίπτωση: Αν $g(0) \cdot g(1) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$ ή $g(1) = 0$

$$\Rightarrow x_0 = 0 \quad \text{ή} \quad x_0 = 1$$

• 2η περίπτωση: Αν $g(0) \cdot g(1) < 0$ από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $g(x_0) = 0$

- 2η περίπτωση: Αν $g(0) \cdot g(1) < 0$ από Θ.Βολζανο υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε $g(x_0) = 0$

Από από (1η), (2η) περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0,1]$ ώστε $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = -x_0 + 1$.

Άρα για το βήμα.

3.10 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 2\pi]$ με $f(0) = f(2\pi)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, \pi]$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = f(\pi + \xi)$.